

Modellbasierte Regelung eines Roboterfahrwerks



TUG

Technische Universität Graz
Erzherzog-Johann-Universität

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Diplomarbeit

vorgelegt von

Johannes Köb

Betreuer und Beurteiler:

Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Michael Hofbaur

Oktober 2005

Kurzfassung

Ein wesentlicher Teil der Regelung der Bewegungen autonomer Roboter ist die Ermittlung der für die gewünschten Bewegungen notwendigen Drehzahlen und Lenkwinkel der angetriebenen bzw. gelenkten Räder. Fest programmierte Systeme für diese Aufgabe haben den Nachteil, daß sie bei Veränderungen am Aufbau des Fahrwerks (durch Verschleiß, Antriebsausfälle etc.) keine korrekten Ergebnisse mehr liefern. In dieser Arbeit wird versucht, einen Algorithmus zu entwickeln, der in Echtzeit solche Veränderungen an der Regelstrecke berücksichtigen kann. Es handelt sich dabei um einen modellbasierten Ansatz, d.h. die Information über den aktuellen Zustand des Fahrwerks wird in Form eines geeigneten mathematischen Modells zur Verfügung gestellt. Die Quelle dieser Informationen, beispielsweise ein entsprechender Beobachter, wird als gegeben vorausgesetzt. Im Verlauf der Arbeit werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt: zunächst ein auf kinetischen Betrachtungen aufbauender, der nur für Fahrwerke ohne kinematische Beschränkungen gilt. Im zweiten Teil wird, ausgehend von den kinematischen Beschränkungen, die bei den meisten Fahrwerken vorhanden sind, eine allgemeinere Methode entwickelt, um einerseits die im aktuellen Zustand möglichen Bewegungen zu ermitteln und andererseits die für eine konkrete Bewegung notwendigen Raddrehzahlen und Lenkwinkel zu berechnen.

Abstract

A substantial part of autonomous robot motion control is the determination of the values of rotational speed and steering angle of the propelled and/or steered wheels necessary for the desired movements. Systems that perform this task based on a predetermined strategy have the disadvantage that they don't provide correct results any more if changes in the robot chassis structure occur (due to wearout, drive failures etc.). This work attempts to develop an algorithm which is able to take such changes of the plant into consideration in real time. For this purpose a model-based approach is used, i.e. information about the actual state of the chassis is supplied in form of a suitable mathematical model. The source of this information, for example an appropriate observer, is assumed as given. Two different approaches are introduced in this work: firstly one based solely upon kinetic considerations, which applies only to chassis without kinematic constraints. In a second attempt, coming from these kinematic constraints, which are present with most chassis, a more general method is developed, in order to determine on the one hand the movements possible in the current chassis condition and on the other hand to compute the rotational speeds and steering angles of the wheels necessary for a concrete movement.

Vorwort

Das Thema dieser Diplomarbeit hat mir mein Betreuer, Herr Prof. Michael Hofbaur, vorgeschlagen, bei dem ich zuvor schon einige Lehrveranstaltungen besucht habe, von denen die Vorlesung „Automatisierung mechatronischer Systeme“ in diesem Zusammenhang besonders zu erwähnen ist. Er traf damit insofern meine Vorlieben, als mein Interesse mehr den komplexen Systemen gilt als der exakten Lösung regelungstechnischer Detailprobleme, ohne diese abwerten zu wollen.

Mit der Idee der modellbasierten Regelung tut sich – zusammen mit Methoden zur Parameteridentifikation und Diagnose – ein interessantes und relativ neues Feld auf, in dem sich der Regelungstechniker mehr mit den grundsätzlichen physikalischen Zusammenhängen beschäftigen kann und weniger mit konkreten Parameterwerten etc. Das läßt für die Zukunft einiges erhoffen.

Nachdem sich diese Diplomarbeit aber auch im Dunstkreis des Roboterfußballs bewegt, möchte ich nicht unerwähnt lassen, daß sich die internationale RoboCup-Vereinigung ein ehrgeiziges Ziel gesetzt hat: bis zum Jahr 2050 ein Team menschenähnlicher Roboter aufzustellen, das gegen die Siegermannschaft der Fußball-Weltmeisterschaft, also gegen Menschen, gewinnen kann. Dieses Ziel halte ich aus meiner heutigen Sicht für unrealistisch, im besonderen aber für nicht erstrebenswert. Es hat mich an Joseph Weizenbaum erinnert, der in seinem Buch „Die Macht der Computer und die Ohnmacht der Vernunft“ schreibt, „daß es bestimmte Aufgaben gibt, zu deren Lösung keine Computer eingesetzt werden *sollten*, ungeachtet der Frage, ob sie zu deren Lösung eingesetzt werden *können*“ ([WEI-1977], S. 10). Abgesehen von diesem fragwürdigen Fernziel ist RoboCup jedoch eine hervorragend geeignete Plattform für die technische Weiterentwicklung im Bereich der (autonomen) Robotik und der sogenannten künstlichen Intelligenz, für die es zweifellos auch sinnvolle und ethisch zu rechtfertigende Anwendungen gibt.

Ich möchte diesen Ort schließlich auch nutzen, um einigen Menschen zu danken. Mein besonderer Dank gilt selbstverständlich Herrn Prof. Michael Hofbaur, der mich nicht nur auf das Thema meiner Diplomarbeit gebracht hat, sondern sich auch immer für meine Anliegen Zeit genommen hat. Mit seinen Fragen und Denkanstößen hat er mir an entscheidenden Punkten im Verlauf der Entstehung dieser Arbeit sehr weitergeholfen – stets wohlwollend und niemals überfordernd. Vielen weiteren Professoren, deren Namen ich nicht aufzählen kann, bin ich ebenfalls sehr dankbar für ihre Lehrveranstaltungen und die größtenteils vorhandene mensch-

liche Qualität. Ein Wort des Dankes gebührt aber auch Frau Astrid Brodtrager vom Dekanat der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, die mit ihrer unkomplizierten und hilfsbereiten Art dafür sorgt, daß das Studium nicht zu einem bürokratischen Spießrutenlauf wird. Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei meinen Studienkollegen und Freunden, besonders aus dem Studentenheim, deren Namen aufzuzählen den Rahmen sprengen würde. Sie waren mir, jeder auf seine Art und Weise, in vielerlei Situationen einen wertvolle Stütze. Zuletzt, aber um so mehr, danke ich meinen Eltern und Geschwistern, die mich in den vergangenen 25 Jahren mit ihrer Erziehung und ihrer Liebe mehr als irgend jemand anderer geprägt und unterstützt haben.

Graz, im Oktober 2005

Johannes Köb

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	7
1.1 Zielsetzung	7
1.2 Aufbau der Arbeit	9
1.3 Definitionen	10
1.4 Relevanz, Aktualität, Kontext	12
2 Hauptteil	13
2.1 erster Lösungsansatz (kinetische Betrachtung)	13
2.1.1 einführendes Beispiel – RoboCup-Roboter mit altem Fahrwerk	13
2.1.2 allgemeine Vorgangsweise	21
2.1.3 Modellbildung	23
2.1.4 Reglerentwurf	26
2.1.5 Simulation	29
2.1.6 abschließende Beurteilung	34
2.2 zweiter Lösungsansatz (kinematische Betrachtung)	35
2.2.1 Modell des Fahrwerks	35
2.2.1.1 kinematische Beschränkungen der Räder	36
2.2.1.1.1 festes Rad	36
2.2.1.1.2 gelenktes Rad	37
2.2.1.1.3 Schwenkrad	38
2.2.1.1.4 omnidirektionales Rad	39
2.2.1.1.5 Kugelrad	40
2.2.1.2 kinematische Beschränkungen des Fahrwerks	40
2.2.2 mögliche Bewegungen – Momentanpol	42
2.2.2.1 mögliche Lage des Momentanpols	44
2.2.2.1.1 Beispiel – differential-drive-Fahrwerk	45
2.2.2.1.2 allgemeines Gleichungssystem für den Momentanpol	46
2.2.2.1.3 Lösbarkeit des Gleichungssystems	49
2.2.2.2 mögliche Bewegungen	50
2.2.2.2.1 Beispiel – Fahrwerk mit vier omnidirektionalen Rädern	54
2.2.2.2.2 Beispiel – Fahrwerk mit drei gelenkten Rädern	59
2.2.3 gewünschte Bewegung und Momentanpol	65
2.2.4 Lenkwinkel und Raddrehzahlen	67
2.2.4.1 Bestimmung des Lenkwinkels aus der Lage des Momentanpols	67
2.2.4.2 Bestimmung der Raddrehzahl aus der Lage des Momentanpols	69
2.2.5 Modellbildung	72
2.2.6 Simulation	75
3 Resümee	79
4 Literaturverzeichnis	81
5 Anhang	82

1 Einleitung

1.1 Zielsetzung

Bisher ist es üblich, für den Betrieb eines Roboterfahrwerks jeweils ein Regelgesetz zu entwerfen, das genau auf dieses eine Fahrwerk abgestimmt ist. Eine mögliche Regelungsstruktur, die aus dieser Methode resultiert, ist in Abb. 1 angegeben: Ein übergeordnetes System, beispielsweise ein Pfadplaner oder ein Algorithmus zur Hindernisvermeidung, gibt dem Fahrwerksregler einen Geschwindigkeitsvektor als Führungsgröße vor. Aus diesen Geschwindigkeitssollwerten werden die notwendigen Raddrehzahlen bestimmt – ein Vorgang, der stark vom Aufbau des Fahrwerks, d.h. von Anzahl, Art, Lage und Größe der Räder, abhängig ist. Die so ermittelten Sollwerte der Raddrehzahlen werden den Drehzahlreglern der einzelnen Räder übergeben. Diese wiederum können unterschiedlich aufgebaut sein (Kaskadenstruktur mit unterlagertem Motorstromregler, Zustandsregler etc.) und zusätzliche Funktionen (z.B. Antriebs-Schlupf-Regelung) besitzen. Auf unterster Ebene befinden sich als Stellglieder (bei Gleichstrommotoren) H-Brücken mit PWM-Ansteuerung.

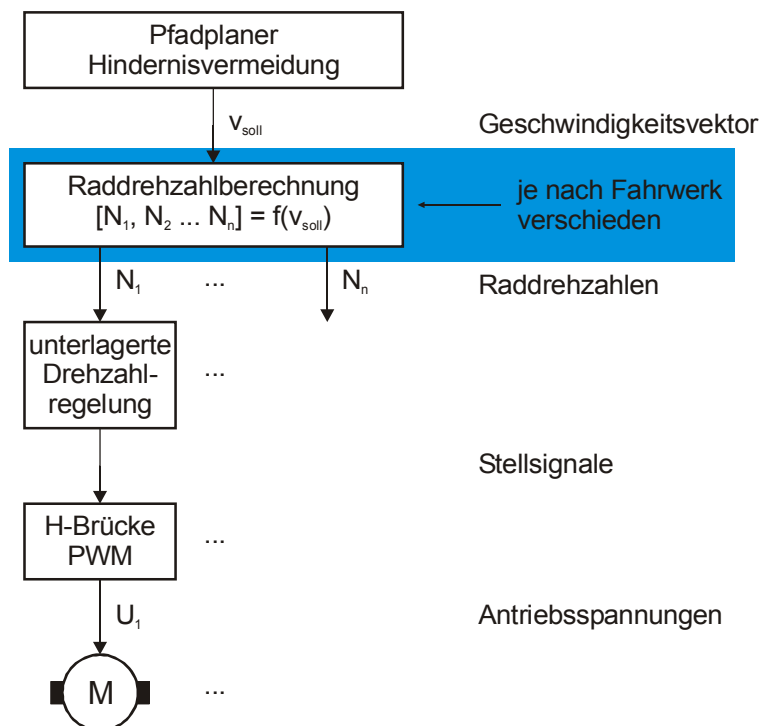


Abb. 1: herkömmliche Regelungsstruktur

Dieses und andere Regelkonzepte erfüllen ihre Funktion in vielen Anwendungen. Probleme treten jedoch auf, wenn sich Parameter eines Fahrwerks ändern, sei es durch Verschleiß, Ausfälle oder aufgrund von bewußten Veränderungen am Fahrwerk bis zu dessen Austausch ge-

gen ein möglicherweise gänzlich anderes. In derartigen Fällen kann nur ein Regelalgorithmus Abhilfe schaffen, der für beliebige Fahrwerksgeometrien anwendbar ist.

Um einen solchen – allgemeineren – Regelalgorithmus zu finden, kann ein modellbasierter Ansatz gewählt werden: Das Modul zur Berechnung der Raddrehzahlen wird allgemein formuliert und erhält aus einem geeigneten mathematischen Modell die aktuellen Informationen über das Fahrwerk (s. Abb. 2). Dieses Fahrwerksmodell kann sich in bestimmten Anwendungen im laufenden Betrieb ändern, beispielsweise wenn eine Möglichkeit zur Fehlererkennung besteht. In einem solchen Fall wird anhand der vorhandenen Meßgrößen der Fahrwerkszustand ermittelt (geschätzt) und daraus ein aktuelles Modell erstellt. In anderen Fällen könnte z.B. nur bei bewußten Veränderungen am Fahrwerk dieses Modell manuell der Realität angepaßt werden.

Falls sich aufgrund der Struktur bzw. des aktuellen Zustands des Fahrwerks Einschränkungen in der Beweglichkeit des Fahrwerks ergeben, werden diese dem übergeordneten System (Pfadplaner o.ä.) mitgeteilt, damit dieses seine Arbeit darauf einstellen kann und vom Fahrwerk keine Bewegungen verlangt, die nicht ausgeführt werden können.

Die übrigen Vorgänge sind dieselben wie bisher: Die berechneten notwendigen Raddrehzahlen werden den Reglern der angetriebenen Räder übermittelt und dort umgesetzt. Dasselbe gilt bei einem Fahrwerk mit gelenkten Rädern auch für deren Lenkwinkel.

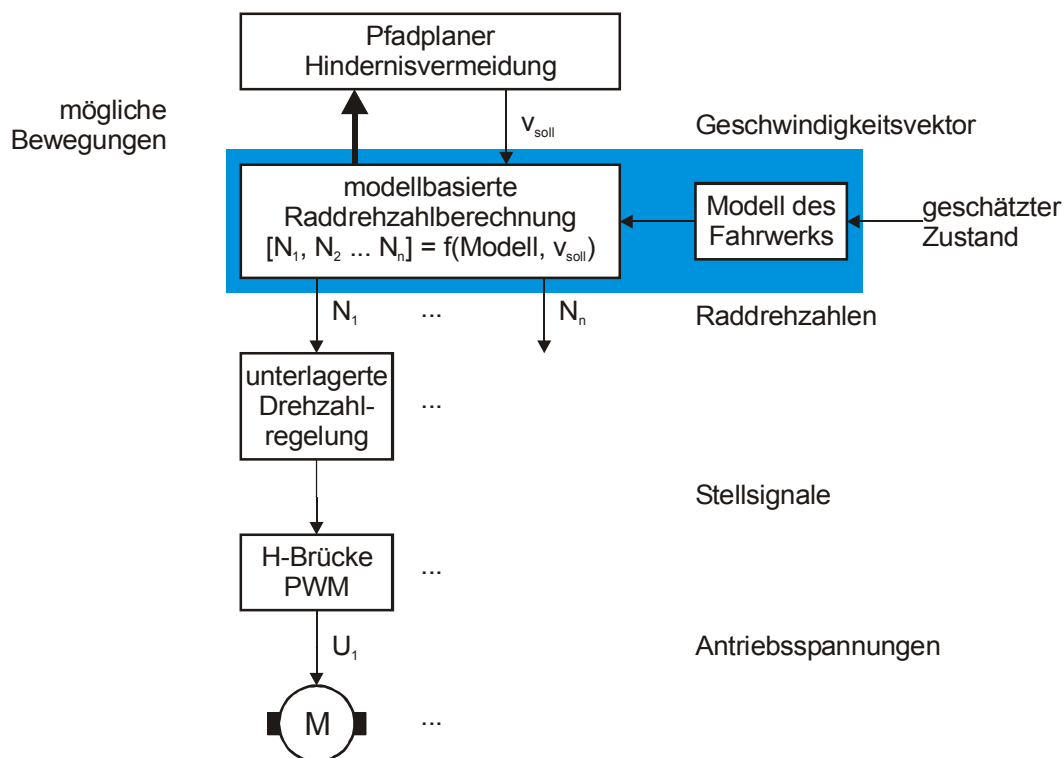


Abb. 2: modellbasierte Regelungsstruktur

Ziel dieser Arbeit ist es also, einen möglichst allgemein verwendbaren Algorithmus zur Berechnung der Raddrehzahlen zu entwickeln. Die Informationen über das Fahrwerk bzw. dessen aktuellen Zustand sollen diesem in Form eines mathematischen Modells zugeführt werden. Anhand dieses Modells ist zu ermitteln, welche Bewegungen dem Fahrwerk im aktuellen Zustand möglich sind, damit der übergeordnete Regler eine zulässige Bewegung vorgeben kann. Diese ist die einzige Eingangsgröße des Moduls – ein Vektor, der die gewünschte Geschwindigkeit in zwei (orthogonalen) Komponenten und die Winkelgeschwindigkeit um die Hochachse enthält. Anhand dieser Werte sollen schließlich die Raddrehzahlen der angetriebenen Räder und gegebenenfalls die Lenkwinkel der gelenkten Räder bestimmt werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Zunächst wird das Fahrwerk der „alten“ Fußballroboter des RoboCup-Teams der TU Graz aus dem Jahr 2002 untersucht. Dieses ist aus vier einzeln angetriebenen omnidirektionalen Rädern auf zwei orthogonalen Achsen aufgebaut. Aufgrund des Fehlens von kinematischen Beschränkungen ist es bei diesem Fahrwerk möglich, ausschließlich den Zusammenhang zwischen den Radmomenten einerseits und den resultierenden Kräften und dem Drehmoment um die Hochachse andererseits zu betrachten. Damit kann ein Steuergesetz für redundante Fahrwerke ohne kinematische Beschränkungen entworfen werden.

Weiters wird ein mathematisches Modell des Roboters aufgestellt, anhand dessen ein Regler entworfen wird, der das oben erwähnte Steuergesetz zur „Verteilung“ der Antriebsmomente benützt. In der Simulation verschiedener Bewegungsabläufe mit Hilfe von MATLAB/Simulink wird dessen Anwendbarkeit gezeigt.

Aufgrund der Tatsache, daß die erste entwickelte Methode nicht zu einem ausreichend allgemein anwendbaren Regelalgorithmus führt, wird in einem zweiten Lösungsansatz von den in vielen Fällen auftretenden kinematischen Beschränkungen des Fahrwerks ausgegangen. Anhand eines Fahrwerksmodells kann die Menge der möglichen Bewegungen des Fahrwerks ermittelt werden. Diese Information wird vom übergeordneten System zur Vorgabe einer zulässigen Bewegung genützt, die dann durch entsprechende Raddrehzahlen und Radstellungen umgesetzt wird.

Für diese zweite Methode wird ein MATLAB-Programm erstellt, mit dessen Hilfe die Arbeitsweise des Algorithmus Schritt für Schritt dargelegt werden kann. Mit Hilfe eines einfachen Simulationsmodells wird die Funktion der Methode veranschaulicht.

1.3 Definitionen

Der Begriff des Fahrwerks ist einer der meistgebrauchten in dieser Arbeit. Daher ist es von Vorteil, diesen genau zu definieren. Unter dem Fahrwerk wird hier die Anordnung aller Räder eines Roboters verstanden. Dazu gehören auch die Radantriebe und, falls vorhanden, die Lenkantriebe der gelenkten Räder. Das Fahrwerk wird als ein starrer Körper (z.B. ein Metallrahmen) angesehen, der sich auf einer waagrechten Ebene bewegt. In dieser besitzt das Fahrwerk drei Freiheitsgrade, nämlich zwei für die Position (durch Translation) und einen für die Ausrichtung (durch Rotation um die Hochachse). Selbstverständlich besitzt das Fahrwerk noch weitere (innere) Freiheitsgrade, beispielsweise aufgrund von Rad- und Lenkachsen, aber für die Position des Fahrwerks (und damit des Roboters) sind nur die drei oben erwähnten interessant. (Vgl. dazu und für den Rest des Kapitels [SIE-NOU-2004], S. 48ff)

Zu den Rädern sei an dieser Stelle nur erwähnt, daß von ihnen in dieser Arbeit fünf Arten unterschieden werden. Genau beschrieben sind diese in Kap. 2.2.1.1.

Zur Beschreibung der Position des Fahrwerks bzw. des Roboters in seinen drei Freiheitsgraden können zwei verschiedene Koordinatensysteme verwendet werden (s. Abb. 3):

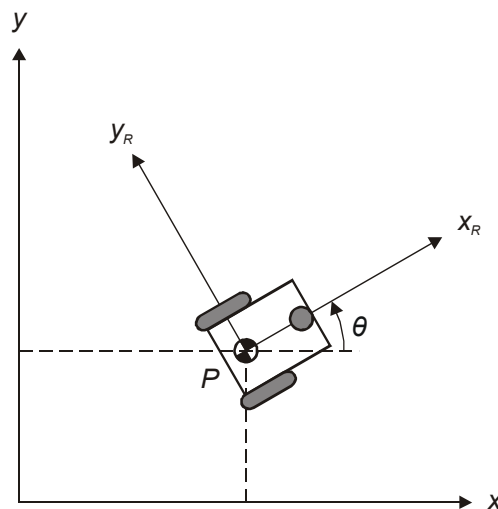


Abb. 3: Inertialsystem und lokales Bezugssystem

Das Inertialsystem beschreibt die Position des Roboters aus Sicht eines ruhenden Beobachters. Dazu wird ein Punkt P auf dem Fahrwerk als Referenzpunkt gewählt. Die Position von P wird mit den kartesischen Koordinaten x und y angegeben, während für die Verdrehung des lokalen Bezugssystems gegenüber dem Inertialsystem die Größe θ verwendet wird.

Um Verwechslungen auszuschließen, wird für Vektoren im Inertialsystem der Index I verwendet:

$$\xi_I = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Das lokale Bezugssystem des Fahrwerks hat seinen Ursprung im Referenzpunkt P und bewegt sich (in Translation und Rotation) mit dem Fahrwerk mit. Die Koordinaten lauten hier x_R und y_R . Um die Positionsangabe zu vervollständigen, wird auch hier der Winkel θ verwendet:

$$\xi_R = \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}_R. \quad (1.2)$$

Bewegungen des Roboters im Inertialsystem können mit Hilfe einer orthogonalen Drehmatrix sehr leicht in das lokale Bezugssystem umgerechnet werden. Die Drehmatrix ist selbstverständlich abhängig von der Orientierung θ des Roboters:

$$\dot{\xi}_R = \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I \quad (1.3)$$

mit

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Dasselbe gilt für die Umrechnung einer Bewegung vom lokalen Bezugssystem in das Inertialsystem. Die hier benötigte Inverse der Drehmatrix kann durch Transposition derselben gewonnen werden:

$$\dot{\xi}_I = \mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot \dot{\xi}_R \quad (1.5)$$

mit

$$\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(\theta)^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

1.4 Relevanz, Aktualität, Kontext

Wie bereits erwähnt, existieren im wesentlichen zwei große Anwendungsfelder für modellbasierte Regelkonzepte: Zum einen wird es dadurch möglich, einen Regler allgemein zu formulieren und verschiedene Regelstrecken, auf die dieser Regler angewendet werden soll, durch entsprechende mathematische Modelle zu berücksichtigen. Das bedeutet, daß der eigentliche Reglerentwurf nur einmal durchgeführt werden muß, da sich der Regler anhand der Informationen, die er aus dem Modell erhält, selbständig auf die Strecke einstellt (z.B. bei der Inbetriebnahme).

Die zweite Anwendungsmöglichkeit liegt im Bereich der ausfalltoleranten Systeme, wo auf Veränderungen in der Strecke flexibel reagiert werden muß. Aufgrund der oftmals vielen Möglichkeiten von Ausfällen und Veränderungen ist es hier meist nicht zweckmäßig, die Reglerparameter für verschiedene Ausfallsszenarien von vornherein (offline) zu berechnen und im Betrieb zwischen diesen umzuschalten. Im Gegensatz zum ersten Fall ist es hier notwendig, Änderungen an der Strecke (und damit auch im Modell) im laufenden Betrieb durch automatische Anpassung des Reglers (online) zu berücksichtigen. Die vorliegende Arbeit liefert dazu jenen Teil, der auf Veränderungen im Modell reagiert. Die Erkennung von Parameteränderungen und Ausfällen in der realen Strecke, d.h. die Erfassung der Streckeninformationen, die für die Erstellung bzw. Veränderung des Modells notwendig sind, ist nicht Gegenstand dieser Arbeit und wird daher vorausgesetzt.

Ein Bedarf für eine modellbasierte Fahrwerksregelung besteht vor allem im Bereich der autonomen mobilen Roboter, da diese (aufgrund ihrer Autonomie) zumindest in der Lage sein sollten, nach Auftreten eines Fehlers einen Servicepunkt zu erreichen, damit dieser behoben werden kann. Beispiele dafür sind automatische Transportgeräte, wie sie in Fabrikhallen verwendet werden, derzeit allerdings noch nicht als wirklich autonome Fahrzeuge, da sie aus Sicherheitsgründen meist starr an eine im Boden verlegte Induktionsschleife gebunden sind. Die in dieser Arbeit betrachtete Anwendung ist, auf den ersten Blick betrachtet, eher spielerischer Natur, nämlich die Fußballroboter der TU Graz, die an den RoboCup-Bewerben teilnehmen. Auch hier treten oft Fehler auf, die den Spielverlauf negativ beeinflussen, was durch eine modellbasierte Fahrwerksregelung zum Teil vermieden werden kann.

2 Hauptteil

2.1 erster Lösungsansatz (kinetische Betrachtung)

Ausgangspunkt für einen ersten (einfachen) Ansatz zur modellbasierten Regelung eines Roboterfahrwerks ist die Vorstellung, daß die tatsächlich am Massenmittelpunkt angreifenden Kräfte in x_R - und y_R -Richtung sowie das Moment um die Hochachse aus den Kräften an den Kontaktpunkten der Räder resultieren. Diese wiederum sind Folge der von den Antriebseinheiten auf die Radachsen aufgebrauchten Drehmomente.

Um von dieser Erkenntnis zu einem modellbasierten Regelkonzept zu gelangen, ist es notwendig, die Kausalität der Fragestellung umzudrehen. Es wäre ja ein Leichtes, für ein Roboterfahrwerk einen Regler zu entwerfen, dessen Ausgangsgrößen die oben erwähnten Kräfte und das Drehmoment am Massenmittelpunkt sind. Aus praktischen Gründen ist es jedoch nicht möglich, diese drei Größen ohne weiteres auf das Fahrwerk aufzubringen. Üblicherweise werden diese mit Hilfe von mehreren Rädern zusammengesetzt, denkbar wäre aber auch, dazu beispielsweise Propeller, Schubdüsen oder ähnliche Betriebsmittel zu verwenden, die an einer bestimmten Stelle des Fahrwerks eine Kraft in eine vorgegebene Richtung aufbringen, wie es z.B. bei der Lageregelung von Satelliten geschieht.

Gesucht ist daher ein Algorithmus, der in der Lage ist, die oben erwähnten Stellgrößen durch geschickte Aufteilung auf die vorhandenen Räder o.ä. zu realisieren. Dieser soll jedoch nicht starr auf ein bestimmtes Fahrwerk hin entworfen werden, sondern auf einem geeigneten Modell des Fahrwerks basieren. Bei Änderungen am Fahrwerk, z.B. durch Motorausfälle, oder gar dem Austausch des gesamten Fahrwerks durch ein anders geartetes soll die Betriebsfähigkeit desselben ohne weitere Eingriffe erhalten bleiben, sofern das benutzte Modell entsprechend angepaßt wird.

Vorausgesetzt wird dabei, daß am realen System eine direkte Möglichkeit zur Vorgabe der einzelnen Radmomente besteht (z.B. durch einen unterlagerten Momentenregler für jedes Rad). Der Einfachheit halber wird der Ursprung des lokalen Bezugssystems auf den Massenmittelpunkt des Roboters gelegt, was keine praktische Einschränkung darstellt, aber die Herleitung erleichtert.

2.1.1 einführendes Beispiel – RoboCup-Roboter mit altem Fahrwerk

Das Fahrwerk der bisher verwendeten Fußballroboter aus dem Jahr 2002 des RoboCup-Teams der TU Graz besteht aus vier omnidirektionalen Rädern, die jeweils von einem eigenen

Getriebemotor angetrieben werden. Sie sind, wie in Abb. 4 dargestellt, ungefedert auf zwei orthogonalen Achsen angeordnet.

Eines der Probleme, die an diesem Fahrwerk auftreten, folgt aus der Tatsache, daß bereits drei Punkte (in diesem Fall Kontaktpunkte der Räder) die Lage des Roboters im Raum vollständig definieren. Hat nun der Untergrund, auf dem sich der Roboter bewegt, auch nur geringe Unebenheiten, so erhält eines der vier Räder weniger oder keinen Kontakt zu diesem und kann dadurch auch keine Kraft übertragen. Eine der Möglichkeiten, mit diesem Problem umzugehen, ist, beim Auftreten dieses Falls auf ein Modell umzuschalten, in welchem dieses durchdrehende Rad nicht vorhanden ist. Somit würden die übrigen drei Räder die Aufgabe des vierten Rades übernehmen.

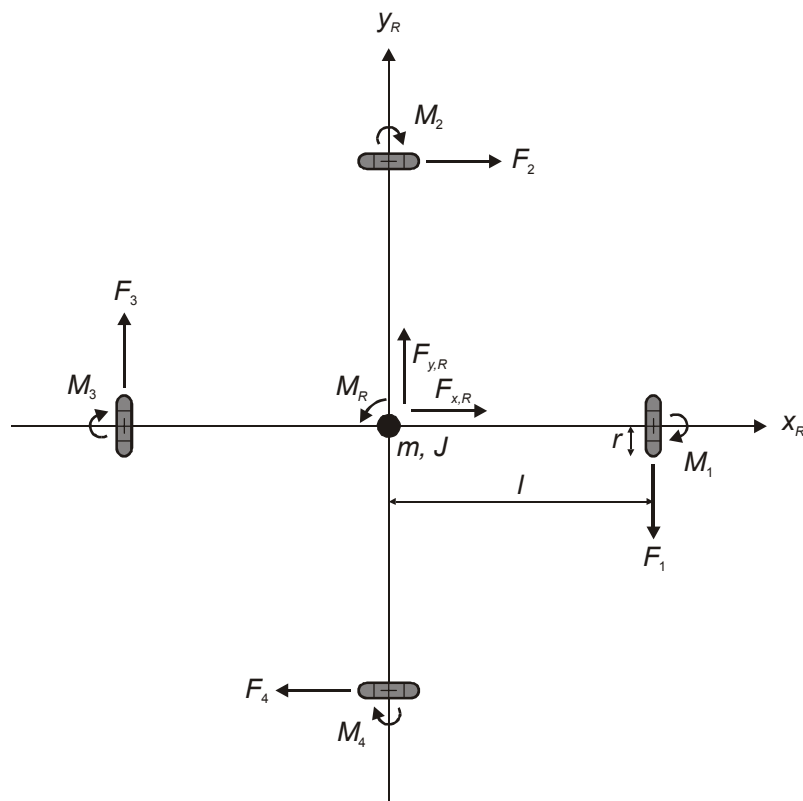


Abb. 4: Fahrwerksgeometrie der alten RoboCup-Roboter von 2002

Zunächst geht es also darum, eine Beziehung zwischen den einzelnen Radmomenten und den resultierenden Kräften bzw. dem resultierenden Moment zu finden.

Die Radmomente bewirken an den Kontaktpunkten der vier Räder Kräfte, die ansonsten nur vom Radius r der Räder abhängig sind:

$$F_i = \frac{M_i}{r} \quad \text{für } i = 1, \dots, 4. \quad (2.1)$$

Aufgrund der Geometrie des Fahrwerks setzen sich die resultierenden Kräfte und das resultierende Moment am Massenmittelpunkt folgendermaßen zusammen:

$$F_{x,R} = 0F_1 + 1F_2 + 0F_3 - 1F_4 = \frac{1}{r} \cdot (0M_1 + 1M_2 + 0M_3 - 1M_4), \quad (2.2)$$

$$F_{y,R} = -1F_1 + 0F_2 + 1F_3 - 0F_4 = \frac{1}{r} \cdot (-1M_1 + 0M_2 + 1M_3 + 0M_4), \quad (2.3)$$

$$M_R = -lF_1 - lF_2 - lF_3 - lF_4 = -\frac{l}{r} \cdot (M_1 + M_2 + M_3 + M_4). \quad (2.4)$$

Diese drei Gleichungen können in Matrixschreibweise zusammengefaßt werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_R} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 & -\frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{l}{r} & -\frac{l}{r} & -\frac{l}{r} & -\frac{l}{r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}. \quad (2.5)$$

Dabei handelt es sich bei \mathbf{A} um eine Matrix, die in diesem Fall das Fahrwerksmodell (im Sinn der modellbasierten Regelung) verkörpert. Ändern sich im Betrieb irgendwelche Parameter des Fahrwerks, so muß diese Matrix entsprechend angepaßt werden, damit die Regelung auf gültigen Annahmen aufbauen kann.

Der Vektor \mathbf{M} enthält die Antriebsmomente aller angetriebenen Räder und \mathbf{F}_R die resultierenden Größen, jeweils in den entsprechenden SI-Einheiten:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{A}\mathbf{M}. \quad (2.6)$$

Damit besteht ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen den Radmomenten und den resultierenden Kräften bzw. dem resultierenden Moment. Sind die Radmomente bekannt, können mit Gleichung (2.6) die resultierenden drei Größen eindeutig ermittelt werden.

Wie oben bereits erwähnt, muß diese Beziehung jedoch umgedreht werden, da ja die resultierenden Größen (\mathbf{F}_R) bekannt (weil durch den Pfadplaner vorgegeben) sind, während die Radmomente (\mathbf{M}) gesucht (und auch vom aktuellen Zustand des Fahrwerks abhängig) sind.

Handelte es sich bei \mathbf{A} immer um eine quadratische Matrix, könnte das Gleichungssystem (2.6) mit Hilfe der Inversen von \mathbf{A} gelöst werden. Dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall, da \mathbf{A} (aufgrund der drei resultierenden Größen F_x , F_y und M) immer drei Zeilen besitzt, die Spaltendimension hingegen der Anzahl der angetriebenen Räder entspricht. Daher wird

auf die als Pseudoinverse bekannte Matrix $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ zurückgegriffen, mit der Gleichung (2.6) (von links) multipliziert wird:

$$\underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{A}^+} \mathbf{F}_R = \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{M}}_{\mathbf{E}}. \quad (2.7)$$

Der markierte Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.7) ergibt die Einheitsmatrix, so daß nach dem Vertauschen der beiden Seiten der Gleichung die Beziehung

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R \quad (2.8)$$

zur Bestimmung der notwendigen Radmomente bei vorgegebenem \mathbf{F}_R angegeben werden kann.

Die Funktionsfähigkeit dieser verblüffend einfachen Methode soll an einem konkreten Zahlenbeispiel demonstriert werden. Dazu wird eine Fahrwerksgeometrie wie in Abb. 4 mit folgenden Parameterwerten verwendet:

$$r = 0,02 \text{ m,}$$

$$l = 0,2 \text{ m.}$$

Zunächst wird angenommen, daß alle vier Räder voll funktionsfähig und in Betrieb sind. Somit setzt sich die Modellmatrix \mathbf{A} nach Gleichung (2.5) folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & -50 \\ -50 & 0 & 50 & 0 \\ -10 & -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}.$$

Deren Pseudoinverse lautet

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -25 \\ 10 & 0 & -25 \\ 0 & 10 & -25 \\ -10 & 0 & -25 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Gibt nun der Geschwindigkeits- und/oder Positionsregler das Signal

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N,}$$

um in x_R -Richtung zu beschleunigen, so läßt sich mit Hilfe von Gleichung (2.8) der Vektor der dafür notwendigen Radmomente ermitteln:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Dasselbe gilt für den Fall, daß ein Drehmoment im Uhrzeigersinn, d.h.

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ N,}$$

aufgebracht werden soll:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Die qualitative Richtigkeit dieser beiden Ergebnisse ist offensichtlich.

Für dasselbe Fahrwerk soll nun angenommen werden, daß der vierte Antrieb außer Betrieb genommen wird, d.h. das Antriebsmoment M_4 wegfällt. Betrachtet man den Aufbau der Gleichungen (2.2) bis (2.4), so erkennt man, daß die Elemente der vierten Spalte von \mathbf{A} zu Null gemacht werden müssen, um das Modell dieser neuen Situation anzupassen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 50 & 0 \\ -10 & -10 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Pseudoinverse von \mathbf{A} lautet nun

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} -10 & -10 & -50 \\ 20 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & -50 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Es soll wie vorhin eine Kraft in x_R -Richtung erzeugt werden:

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

In diesem Fall setzt sich der Vektor der Radmomente folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Wie vorgegeben, leistet der vierte Antrieb keinen Beitrag zur gewünschten resultierenden Kraft. Die eigentliche Beschleunigung übernimmt zur Gänze M_2 . Dabei würde gleichzeitig ein (unerwünschtes) Drehmoment erzeugt, welches durch M_1 und M_3 kompensiert wird.

Eine ähnliche Situation tritt auf, wenn mit diesem „leicht defekten“ Fahrwerk eine Drehbeschleunigung bewirkt werden soll:

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

Es ergeben sich dabei folgende Werte für die einzelnen Radmomente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Die Drehbeschleunigung wird nun allein von M_1 und M_3 erzeugt. Der funktionsfähige zweite Antrieb kann daran nicht beteiligt werden, da damit unvermeidbar auch eine lineare Beschleunigung einherginge.

Man sieht, daß aufgrund der vorhandenen Redundanz auch bei Ausfall eines Antriebs die Funktionalität des Fahrwerks voll erhalten bleibt. Da sich die Antriebskräfte nicht mehr auf alle vier Antriebe aufteilen, müssen an den verbliebenen Antrieben höhere Drehmomente in Kauf genommen werden.

In einer weiteren Variation des obigen Beispiels soll angenommen werden, daß zusätzlich zum vierten jetzt auch der dritte Antrieb (also M_3) ausfällt.

In der Matrix \mathbf{A} bewirkt dies eine weitere Nullspalte:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Pseudoinverse von \mathbf{A} erhält demgemäß eine weitere Nullzeile:

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} -0,74 & -19,3 & -3,70 \\ 19,3 & 0,74 & -3,70 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Wiederum soll eine in x_R -Richtung beschleunigende Kraft erzeugt werden:

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

Mit Gleichung (2.8) erhält man folgende Werte für die Radmomente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} -0,74 \\ 19,3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Zur Kontrolle werden diese in die umgekehrte Beziehung (2.6) eingesetzt:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,963 \\ 0,037 \\ -0,185 \end{bmatrix} \text{ N bzw. Nm.}$$

Es ist leicht erkennbar, daß die „gewünschten“ resultierenden Größen nur in grober Näherung erreicht werden. Noch stärker ist dieser Effekt, wenn nur ein Drehmoment um die Hochachse bewirkt werden soll:

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

Die Auswertung von Gleichung (2.8) ergibt in diesem Fall

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} -3,70 \\ -3,70 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Die dabei tatsächlich entstehende Kraft-Drehmoment-Kombination kann nun aber auch bei wohlwollender Betrachtung nicht mehr mit der ursprünglich gewünschten in Zusammenhang gebracht werden:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0,185 \\ 0,185 \\ 0,074 \end{bmatrix} \text{ N bzw. Nm.}$$

Die Ursache für dieses seltsame Verhalten liegt in den beiden Nullspalten der Modellmatrix \mathbf{A} , welchen die Ausfälle von zwei Motoren zugrundeliegen. Um die Vorgänge besser zu erkennen, kann man das Gleichungssystem (2.6) neu anschreiben, sodaß die Nullspalten und die zugehörigen Radmomente entfallen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 50 \\ -50 & 0 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_R}.$$

Damit wird ersichtlich, daß dieses Gleichungssystem im aktuellen Fall überbestimmt ist. Aus diesem Grund ist es exakt nicht lösbar und man erhält mit Gleichung (2.8) nur eine (least-squares-optimierte) Näherungslösung. Diese kann, wie in den obigen beiden Beispielen ersichtlich, noch als solche erkennbar oder aber beliebig falsch sein.

Die vorangegangene Reihe von Beispielen macht ersichtlich, daß mit dem Fahrwerk aus Abb. 4 bei zwei Ausfällen von Antrieben keine beliebigen Bewegungen mehr möglich sind, also keine beliebigen Kombinationen von Translation und Rotation.

Betrachtet man Abb. 4 und berücksichtigt man die ausgefallenen Antriebe, so findet man aber beispielsweise in der Richtung der ersten Mediane des lokalen Bezugssystems leicht eine der in diesem Zustand noch möglichen Bewegungen:

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N.}$$

Für die Antriebe ergeben sich damit folgende Stellgrößen:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ Nm.}$$

Setzt man diese zur Kontrolle wieder in die umgekehrte Beziehung (2.6) ein, so erhält man

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N bzw. Nm.}$$

Hier stimmen also trotz der beiden Ausfälle Wunsch und Wirklichkeit überein, weil eine in diesem Zustand noch mögliche Bewegung angesteuert wurde.

2.1.2 allgemeine Vorgangsweise

Die im obigen Beispiel (Kap. 2.1.1) vorgestellte Vorgangsweise kann für beliebige Fahrwerke mit m einzeln ansteuerbaren Rädern ohne kinematische Beschränkungen (z.B. omnidirektionale Räder) verallgemeinert werden. Die Lage des Kontaktpunkts jedes Rads wird in Polarkoordinaten beschrieben, wobei der Abstand zum Koordinatenursprung (Massenmittelpunkt) mit l_i und der Winkel zur x_R -Achse mit α_i bezeichnet werden. Ebenso wird jedem Rad der Radius r_i zugeordnet (s. Abb. 5).

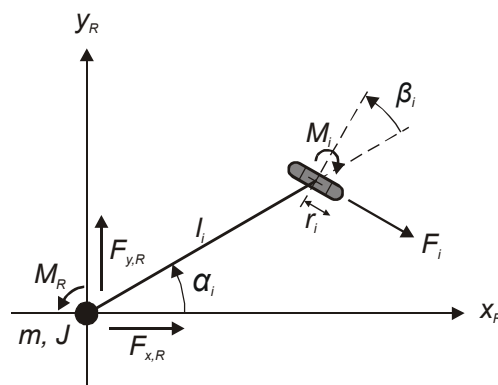


Abb. 5: allgemeines Rad (ohne kinematische Beschränkungen)

Damit gilt (analog zu Gleichung (2.1)) für die Beziehung zwischen Radmoment und Kraft am Kontaktpunkt die Gleichung

$$F_i = \frac{M_i}{r_i} \text{ für } i = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

Die Gleichungen für die Summen der Kräfte und des Drehmoments am Massenmittelpunkt lauten im verallgemeinerten Fall

$$\begin{aligned} F_{x,R} &= \sin(\alpha_1 + \beta_1) \cdot F_1 + \sin(\alpha_2 + \beta_2) \cdot F_2 + \dots + \sin(\alpha_m + \beta_m) \cdot F_m = \\ &= \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{r_1} \cdot M_1 + \frac{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}{r_2} \cdot M_2 + \dots + \frac{\sin(\alpha_m + \beta_m)}{r_m} \cdot M_m, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} F_{y,R} &= -\cos(\alpha_1 + \beta_1) \cdot F_1 - \cos(\alpha_2 + \beta_2) \cdot F_2 - \dots - \cos(\alpha_m + \beta_m) \cdot F_m = \\ &= -\frac{\cos(\alpha_1 + \beta_1)}{r_1} \cdot M_1 - \frac{\cos(\alpha_2 + \beta_2)}{r_2} \cdot M_2 - \dots - \frac{\cos(\alpha_m + \beta_m)}{r_m} \cdot M_m \end{aligned} \quad (2.11)$$

und

$$\begin{aligned} M_R &= -l_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot F_1 - l_2 \cdot \cos \beta_2 \cdot F_2 - \dots - l_m \cdot \cos \beta_m \cdot F_m = \\ &= -\frac{l_1 \cdot \cos \beta_1}{r_1} \cdot M_1 - \frac{l_2 \cdot \cos \beta_2}{r_2} \cdot M_2 - \dots - \frac{l_m \cdot \cos \beta_m}{r_m} \cdot M_m. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Diese drei Gleichungen können wiederum in vektorieller Schreibweise zusammengefaßt werden zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_R} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{r_1} & \frac{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}{r_2} & \dots & \frac{\sin(\alpha_m + \beta_m)}{r_m} \\ -\frac{\cos(\alpha_1 + \beta_1)}{r_1} & -\frac{\cos(\alpha_2 + \beta_2)}{r_2} & \dots & -\frac{\cos(\alpha_m + \beta_m)}{r_m} \\ -\frac{l_1 \cdot \cos \beta_1}{r_1} & -\frac{l_2 \cdot \cos \beta_2}{r_2} & \dots & -\frac{l_m \cdot \cos \beta_m}{r_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \quad (2.13)$$

bzw.

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{A}\mathbf{M}. \quad (2.14)$$

Die Matrix \mathbf{A} bildet darin das Modell des Fahrwerks, das bei Veränderungen an diesem jeweils der Realität angepaßt werden muß, um korrekte Ergebnisse zu gewährleisten. Ändern sich die Parameter eines Rads (l_i , α_i , r_i), so müssen diese in der Matrix aktualisiert werden. Bei einem Ausfall eines Radantriebs müssen die Elemente der zugehörigen Spalte auf Null gesetzt werden.

Da \mathbf{A} im allgemeinen nicht quadratisch ist, muß zum Lösen des Gleichungssystems (2.14) die Pseudoinverse $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ verwendet werden. Multipliziert (von links) mit dieser

$$\underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{A}^+} \mathbf{F}_R = \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A}}_{\mathbf{E}} \mathbf{M} \quad (2.15)$$

erhält man eine Vorschrift zur Bestimmung der Radmomente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^+ \mathbf{F}_R. \quad (2.16)$$

Wie sich im vorangegangenen Beispiel (Kap. 2.1.1) gezeigt hat, vereinfacht sich der Betrieb des Fahrwerks, wenn das Fahrwerk ausreichend aktuiert ist, d.h. beliebige Kraft-Moment-Kombinationen möglich sind. Dies ist sichergestellt, wenn

$$\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3 \quad (2.17)$$

gilt. Somit ist das Gleichungssystem (2.14) nicht überbestimmt, wodurch mit Gleichung (2.16) jedenfalls eine gültige Lösung gefunden wird (und keine Näherungslösung).

Diese Bedingung ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn ein linearer Positions- oder Geschwindigkeitsregler verwendet wird. Ein solcher muß die Möglichkeit haben, sein Ziel mit beliebigen Bewegungen zu erreichen.

Ist diese Voraussetzung nicht gegeben, so muß ein Regler verwendet werden, der durch Kombination der mit dem jeweiligen Fahrwerk bzw. Fahrwerkszustand möglichen Bewegungen zum Ziel kommt.

2.1.3 Modellbildung

Für Fahrwerke, die den Voraussetzungen in Kapitel 2.1.2 entsprechen, kann auf relativ einfache Art und Weise ein mathematisches Modell erstellt werden, welches dann beispielsweise in Simulink simuliert werden kann. Die relevanten Informationen über das Fahrwerk sind ausschließlich in der Matrix \mathbf{A} enthalten.

Zunächst werden die Bewegungsgleichungen des Roboters, der als starrer Körper (punktförmig konzentrierte Masse) gedacht wird, aufgestellt. Dabei muß beachtet werden, daß das zweite NEWTON'sche Axiom, auf welchem diese basieren, nur im Inertialsystem gilt!

$$m\ddot{x} = F_x, \quad (2.18)$$

$$m\ddot{y} = F_y, \quad (2.19)$$

$$J\ddot{\theta} = M. \quad (2.20)$$

Vektoriell angeschrieben lauten die Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}}_{\mathbf{MJ}} \cdot \ddot{\xi}_I = \mathbf{F}. \quad (2.21)$$

Da sich der Roboter möglicherweise laufend dreht und daher Inertial- und lokales Bezugssystem im allgemeinen nicht aufeinander ausgerichtet sind, müssen die Kräfte auf das Fahrwerk im lokalen Bezugssystem betrachtet werden. Analog zu Gleichung (1.5) gilt für den Zusammenhang zwischen diesen Kräften in Inertial- und lokalem Bezugssystem

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot \mathbf{F}_R. \quad (2.22)$$

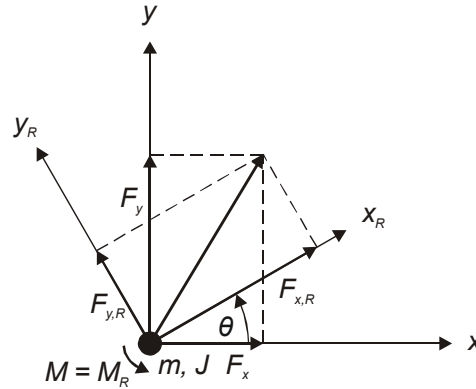


Abb. 6: resultierende Kräfte und Moment in Inertial- und lokalem Bezugssystem

Wird Gleichung (2.22) in Gleichung (2.21) eingesetzt, so erhält man die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Ausrichtung (Winkel θ) des Roboters gegenüber dem Inertialsystem:

$$\mathbf{M}\mathbf{J} \cdot \ddot{\xi}_I = \mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot \mathbf{F}_R. \quad (2.23)$$

Auf den Massenmittelpunkt wirken neben den Antriebskräften auch Reibungskräfte. Diese werden der Einfachheit halber unter Annahme viskoser Reibung modelliert:

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}_R = \mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{C}_R \dot{\xi}_R. \quad (2.24)$$

Der Term $\mathbf{A}\mathbf{M}$ verkörpert darin die Antriebskräfte, die aus den Radmomenten \mathbf{M} (fahrwerksabhängig, daher multipliziert mit \mathbf{A}) resultieren, während der Term $-\mathbf{C}_R \dot{\xi}_R$ die geschwindigkeitsabhängigen Reibungskräfte darstellt. Dabei enthält die Diagonalmatrix

$$\mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} C_{R,x} & 0 & 0 \\ 0 & C_{R,y} & 0 \\ 0 & 0 & C_{R,\theta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

die Reibbeiwerte $C_{R,x}$, $C_{R,y}$ und $C_{R,\theta}$ der drei Freiheitsgrade.

Setzt man \mathbf{F}_R entsprechend Gleichung (2.24) in die Bewegungsgleichungen (2.23) ein und multipliziert von links mit $\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}$, so erhält man die Bewegungsgleichungen in einer Form, die sich leicht in einer graphischen Simulationsumgebung wie Simulink implementieren läßt:

$$\ddot{\xi}_I = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{C}_R \dot{\xi}_R). \quad (2.26)$$

Für $\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}$ gilt dabei

$$\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

da es sich bei $\mathbf{M}\mathbf{J}$ um eine Diagonalmatrix handelt.

Um die Simulation zu erleichtern, muß noch das (unbekannte) $\dot{\xi}_R$ durch das (bekannte) $\dot{\xi}_I$ ersetzt werden. Für diese Drehung gilt gemäß Gleichung (1.3)

$$\dot{\xi}_R = \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I. \quad (2.28)$$

Setzt man diese Transformation in Gleichung (2.26) ein, so erhält man das Differentialgleichungssystem zur Simulation des Fahrwerks mit allgemeinen Parameterwerten:

$$\ddot{\xi}_I = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{C}_R \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I). \quad (2.29)$$

Dieses ist im Simulink-Modell Fahrwerk_alt_8.mdl/Roboter (s. Abb. 7) implementiert.

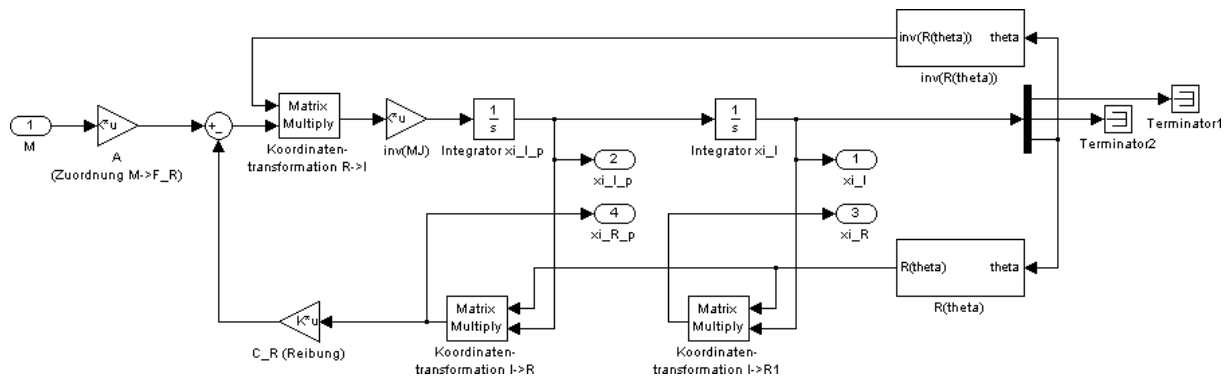


Abb. 7: Simulink-Koppelplan des Fahrwerksmodells (Fahrwerk ohne kinematische Beschränkungen)

Die Matrizen \mathbf{C}_R und $\mathbf{R}(\theta)$ sind im allgemeinen nicht kommutativ. Diese Eigenschaft kann aber erzwungen werden, wenn $C_{R,x} = C_{R,y}$ angenommen wird. Unter dieser Voraussetzung gilt $\mathbf{C}_R \cdot \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{C}_R$ (Kommutivität). Damit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (2.29) zu

$$\ddot{\xi}_I = \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1} \cdot (\mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{C}_R \cdot \dot{\xi}_I). \quad (2.30)$$

Der Beweis dafür kann folgendermaßen erbracht werden: Das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\mathbf{C}_R \cdot \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} C_{R,x} & 0 & 0 \\ 0 & C_{R,y} & 0 \\ 0 & 0 & C_{R,\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{R,x} \cdot \cos \theta & C_{R,x} \cdot \sin \theta & 0 \\ -C_{R,y} \cdot \sin \theta & C_{R,y} \cdot \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & C_{R,\theta} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ist für beliebige Werte von θ offensichtlich dann und nur dann identisch mit

$$\mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{R,x} & 0 & 0 \\ 0 & C_{R,y} & 0 \\ 0 & 0 & C_{R,\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{R,x} \cdot \cos \theta & C_{R,y} \cdot \sin \theta & 0 \\ -C_{R,x} \cdot \sin \theta & C_{R,y} \cdot \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & C_{R,\theta} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

wenn $C_{R,x} = C_{R,y}$ vorausgesetzt wird.

2.1.4 Reglerentwurf

Da zum Test des in Kap. 2.1.2 beschriebenen Algorithmus zur Stellgrößenverteilung kein Pfadplaner o.ä. zur Verfügung steht, wird anhand des in Kap. 2.1.3 erstellten mathematischen Modells des Roboterfahrwerks ein einfacher Positionsregler entworfen.

Betrachtet man die allgemeinste Form des Modells in den Bewegungsdifferentialgleichungen (2.29), so erkennt man, daß dieses aufgrund der anisotropen Reibung ($C_{R,x} \neq C_{R,y}$) im allgemeinen nichtlinear ist. Erst wenn die Annahme

$$C_{R,x} = C_{R,y} = C_{R,xy} \quad (2.33)$$

(isotrope Reibung) getroffen wird, erhält man das lineare Modell in Gleichung (2.30). Diese Annahme erleichtert den Entwurf eines linearen Reglers für das Fahrwerk.

Daß es sich bei Gleichung (2.30) tatsächlich um ein lineares Differentialgleichungssystem handelt, verdeutlicht die Aufgliederung in Gleichung (2.34)

$$\ddot{\xi}_I = \underbrace{-\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}_R}_{\mathbf{A}_I} \cdot \dot{\xi}_I + \underbrace{\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}}_{\mathbf{B}_I} \cdot \underbrace{\mathbf{R}(\theta)^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{M}}_{\mathbf{F}} \quad (2.34)$$

bzw. (2.35)

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{C_{R,xy}}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{R,xy}}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{R,\theta}}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_I} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Der mit \mathbf{A}_I bezeichnete Term bildet die Dynamikmatrix eines linearen Zustandsraummodells. Die Matrix \mathbf{B}_I gewichtet die Eingangsgröße \mathbf{F} , die später vom Regler als Stellgröße verwendet werden kann. Daß diese durch eine Drehmatrix (nichtlinear) in das lokale Bezugssystem des Fahrwerks transformiert und in die Raddrehmomente \mathbf{M} umgesetzt wird, ändert nichts daran, daß das Eingangs-Ausgangs-Verhalten und die Dynamik dieses Systems bezüglich des Inertialsystems linear sind!

Für den Reglerentwurf wird das Differentialgleichungssystem (2.35) in drei lineare zeitinvariante Teilsysteme aufgespalten. Das erste davon

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.36)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{C_{R,xy}}{m} \cdot x_2 + \frac{1}{m} \cdot F_x \quad (2.37)$$

beschreibt das Verhalten des Massenmittelpunkts bezüglich der x_I -Achse. In vektorieller Schreibweise lautet es

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C_{R,xy}}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_x} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_x} \cdot F_x. \quad (2.38)$$

Analog gilt für Bewegungen entlang der y_I -Achse

$$\dot{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C_{R,xy}}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_y} \cdot \mathbf{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_y} \cdot F_y \quad (2.39)$$

und für Rotationen um die Hochachse

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C_{R,\theta}}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_\theta} \cdot M. \quad (2.40)$$

Dabei wurden die Zustandsgrößen jeweils folgendermaßen zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

und

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}.$$

Für diese drei LZI-Systeme zweiter Ordnung kann mit Hilfe der Methode von ACKERMANN jeweils ein Zustandsregler entworfen werden:

$$F_x = -\mathbf{k}_x^T \mathbf{x}, \tag{2.41}$$

$$F_y = -\mathbf{k}_y^T \mathbf{y}, \tag{2.42}$$

$$F_\theta = -\mathbf{k}_\theta^T \boldsymbol{\theta}. \tag{2.43}$$

Diese wiederum können in Verbundmatrixdarstellung zu einem einzigen Zustandsregler mit vektorieller Stellgröße \mathbf{F} zusammengefaßt werden:

$$\mathbf{F} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k}_x^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{k}_y^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{k}_\theta^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

mit der Abkürzung

$$[0 \ 0] = \mathbf{0}^T. \tag{2.45}$$

Der gesamte Regelkreis, d.h. das Fahrwerksmodell mit Zustandsregler und Führungsgrößenvorgabe ist in im Simulink-Modell Fahrwerk_alt_8.mdl (s. Abb. 8) graphisch implementiert.

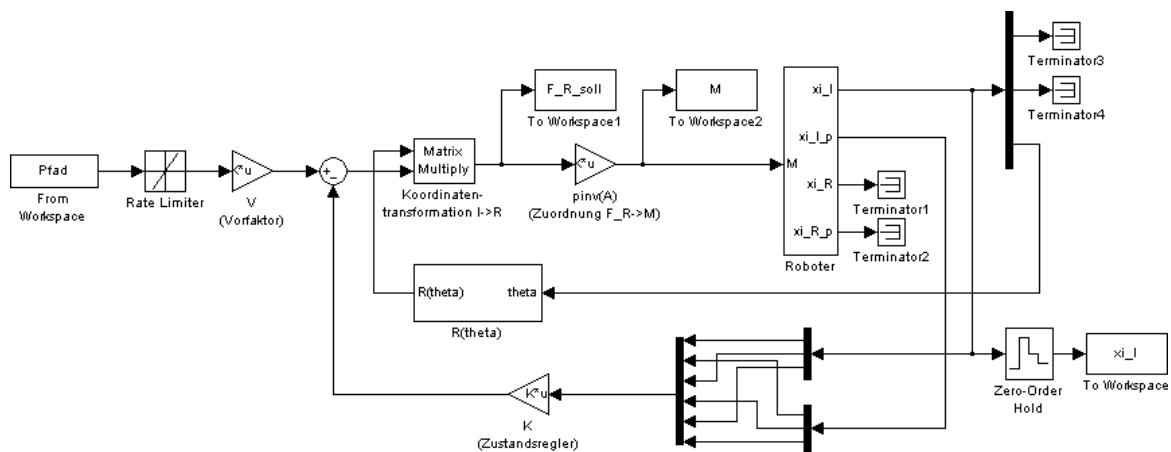


Abb. 8: Simulink-Koppelplan des Positionsregelkreises

2.1.5 Simulation

Um die Funktion des in Kap. 2.1.4 entworfenen Reglers, vor allem aber der in Kap. 2.1.1 entwickelten Methode zur Stellgrößenverteilung zu überprüfen, werden einige Experimente am Simulink-Koppelplan durchgeführt. Als Fahrwerk wird das ebenfalls in Kap. 2.1.1 vorgestellte „alte“ Fahrwerk der RoboCup-Roboter verwendet.

Als Testfall wird mit Hilfe einer entsprechenden Führungsgröße folgender Bewegungsablauf gewählt:

1. Translation vom Koordinatenursprung in Richtung der positiven y -Achse zur Position $\xi_I = [0 \ 1 \ 0]^T$
2. Rotation gegen den Uhrzeigersinn zur Position $\xi_I = [0 \ 1 \ \frac{\pi}{4}]^T$
3. Translation in Richtung der positiven x -Achse zur Position $\xi_I = [0.8 \ 1 \ \frac{\pi}{4}]^T$
4. Translation und Rotation zur Position $\xi_I = [1.2 \ 0 \ -\frac{\pi}{3}]^T$

Für den ersten Versuch wird angenommen, daß alle vier Antriebe ihre Funktion korrekt erfüllen. Dementsprechend gut stimmt der tatsächliche Bewegungsablauf mit dem gewünschten überein. In Abb. 9 ist die Bahnkurve des Roboters und seine Ausrichtung in Zeitschritten von 0,5 s dargestellt. Die Achse des ersten Rads (gleichzeitig Richtung der x_R -Achse) ist zur besseren Orientierung in grün und mit einem Punkt, die übrigen in blau eingezeichnet.

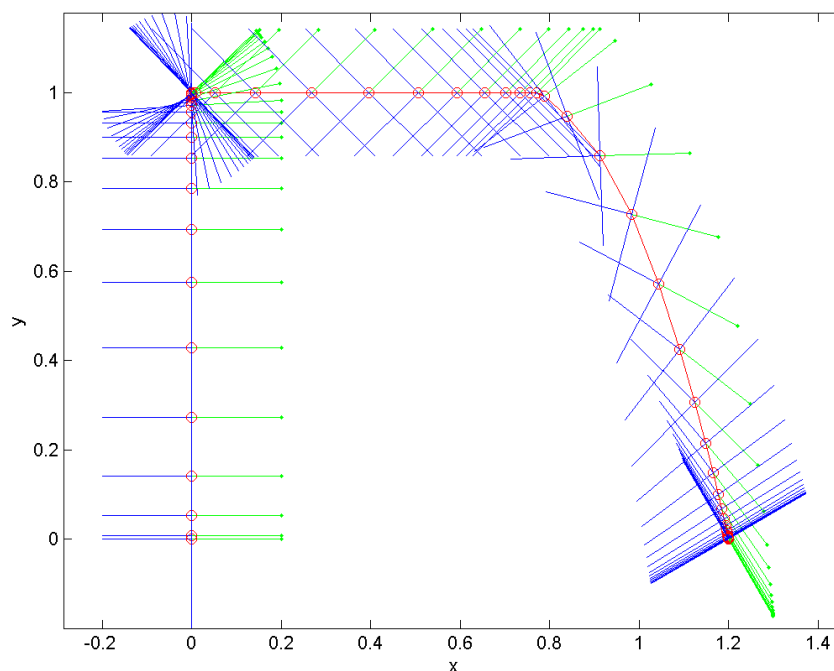


Abb. 9: Bewegungsablauf im Testfall ohne Ausfälle

Wie man sieht, sind beliebige Bewegungsabläufe – Translation, Rotation und Kombinationen der beiden – möglich. Die auffällige Krümmung der Bahnkurve im letzten Abschnitt der Bewegung rührt daher, daß sich die (nichtlineare) Anstiegsbegrenzung der Führungsgröße auf deren y -Komponente längere Zeit auswirkt als auf die x -Komponente. Grund dafür ist die größere Veränderung der Position in y -Richtung.

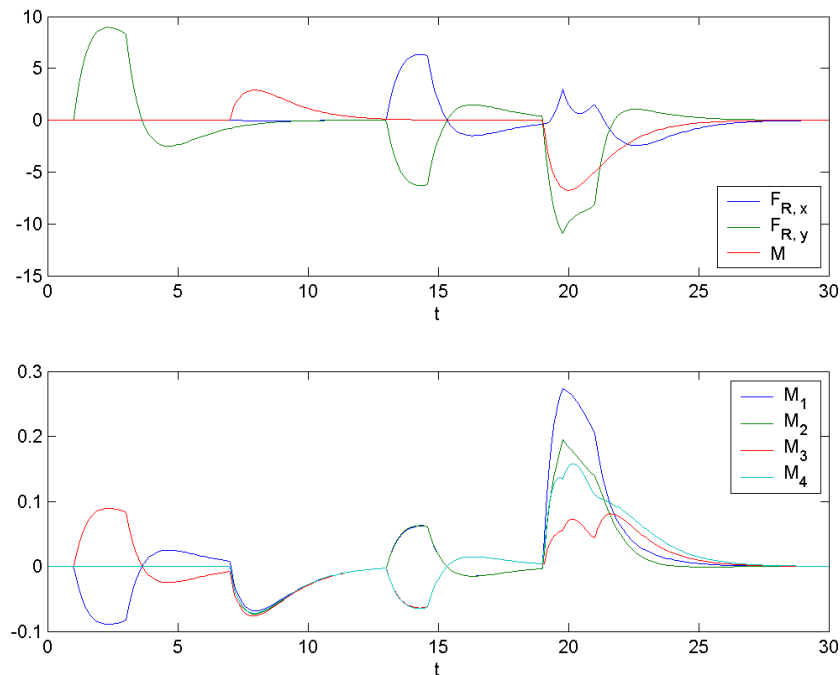


Abb. 10: Stellgrößen im Testfall ohne Ausfälle

In Abb. 10 sind die Stellgrößen des Positionsreglers (im lokalen Bezugssystem) und die aufgrund der Stellgrößenverteilung daraus resultierenden Antriebsmomente der vier Räder dargestellt. Deutlich erkennbar ist, daß in der ersten Bewegungsphase ($1 \leq t < 7$) nur zwei Antriebe tätig sind, während in der dritten (ebenfalls translatorischen, $13 \leq t < 19$) alle vier (gleich) beteiligt sind, da die Bewegungsrichtung um genau 45° verdreht ist. Um eine Rotation zu bewirken, müssen alle Antriebe gleichsinnig wirken (Phase 3, $7 \leq t < 13$). In der letzten Phase ($t \geq 13$) schließlich sind alle Bewegungsarten überlagert.

Fällt nun ein Antrieb (der vierte, strichliert dargestellt) aus, dann ändert sich aufgrund der im Fahrwerk vorhandenen Redundanz am Bewegungsablauf nichts (s. Abb. 11).

Der Verlauf der Stellgrößen wird im Gegensatz dazu sehr wohl verändert: Da ein Antrieb ausfällt, müssen die übrigen dessen Aufgabe übernehmen (s. Kap. 2.1.1). Bemerkbar macht sich dies ab der zweiten Bewegungsphase, da nun beispielsweise für die Rotation nur mehr zwei Antriebe verwendet werden können (s. Abb. 12).

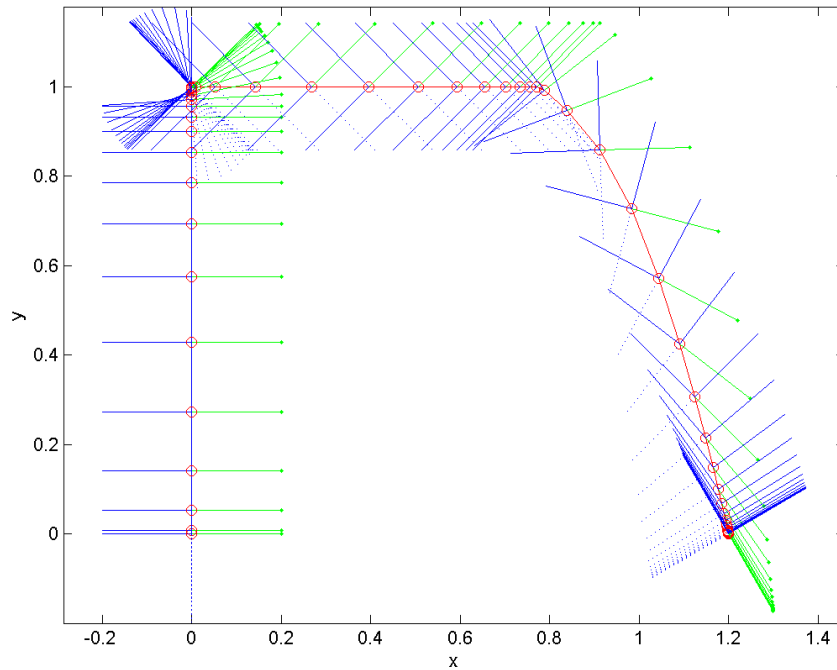


Abb. 11: Bewegungsablauf im Testfall bei Ausfall des vierten Antriebs

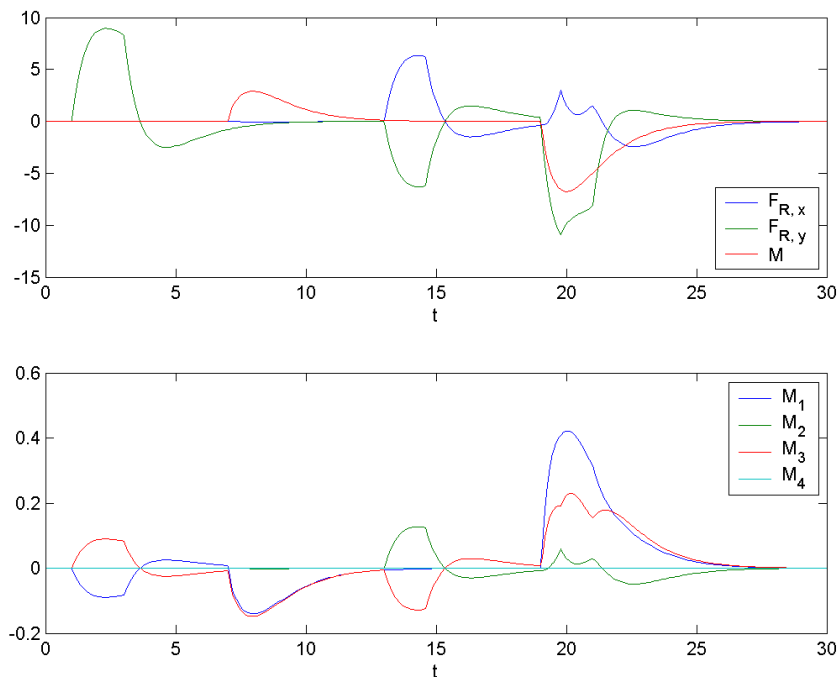


Abb. 12: Stellgrößen im Testfall bei Ausfall des vierten Antriebs

Verschärft sich die Situation, z.B. durch Ausfall des dritten Antriebs, weiter, dann bleibt das nicht ohne Folgen für den resultierenden Bewegungsablauf (s. Abb. 13).

Wie bereits in Kap. 2.1.1 geschildert, können nun Translation und Rotation nicht mehr unabhängig voneinander vorgegeben werden. Besonders betroffen von dieser Situation ist die Regelung der Ausrichtung des Roboters, während die Positionsregelung noch fast unverändert funktioniert.

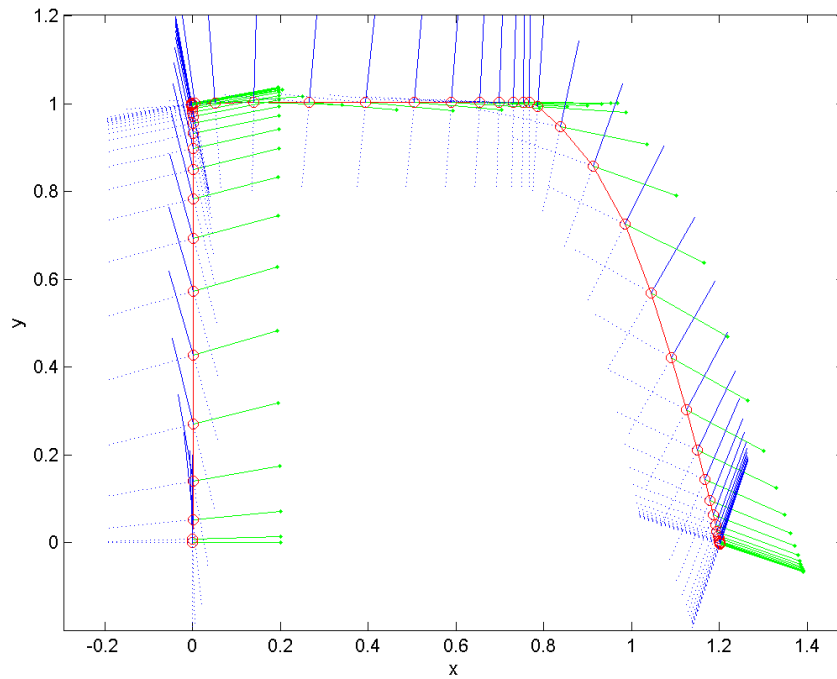


Abb. 13: Bewegungsablauf im Testfall bei Ausfall des dritten und vierten Antriebs

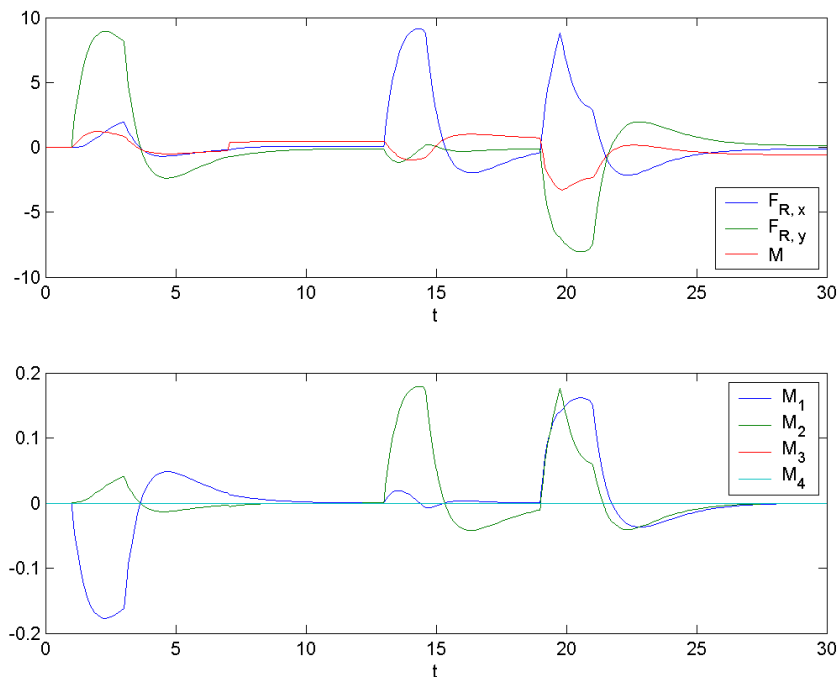


Abb. 14: Stellgrößenverlauf im Testfall bei Ausfall des dritten und vierten Antriebs

Fallen dagegen die Antriebe 2 und 4 aus, ist Rotation noch problemlos möglich, während Translation in x_R -Richtung nicht mehr angesteuert werden kann (s. Abb. 15).

Besonders auffällig wird dies in Abb. 16 ab der dritten Bewegungsphase. Im Vergleich der beiden Diagramme ist erkennbar, daß der Regler eine Kraft in x_R -Richtung aufbringen will, was aber aufgrund des Ausfalls des zweiten und vierten Antriebs vom Fahrwerk nicht ausgeführt werden kann.

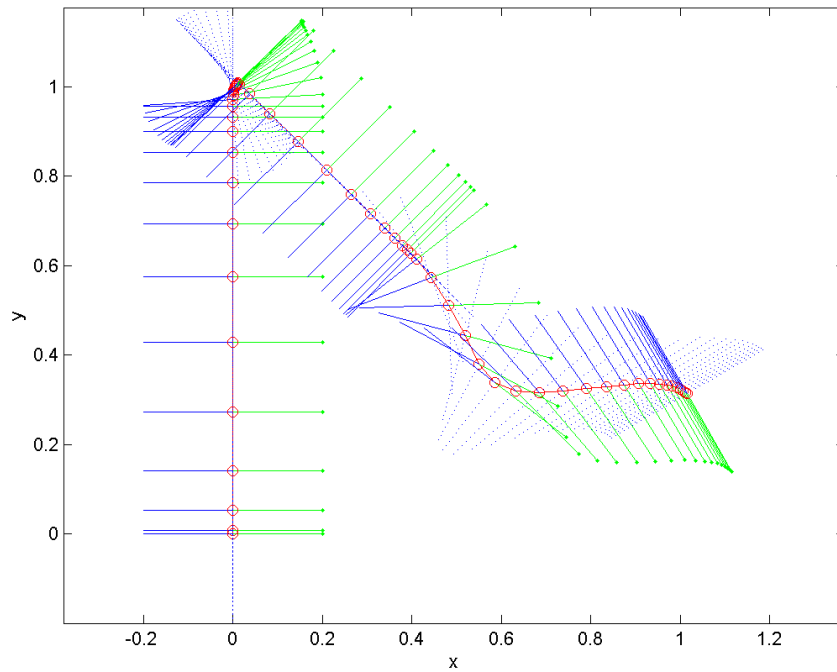


Abb. 15: Bewegungsablauf im Testfall bei Ausfall des zweiten und vierten Antriebs

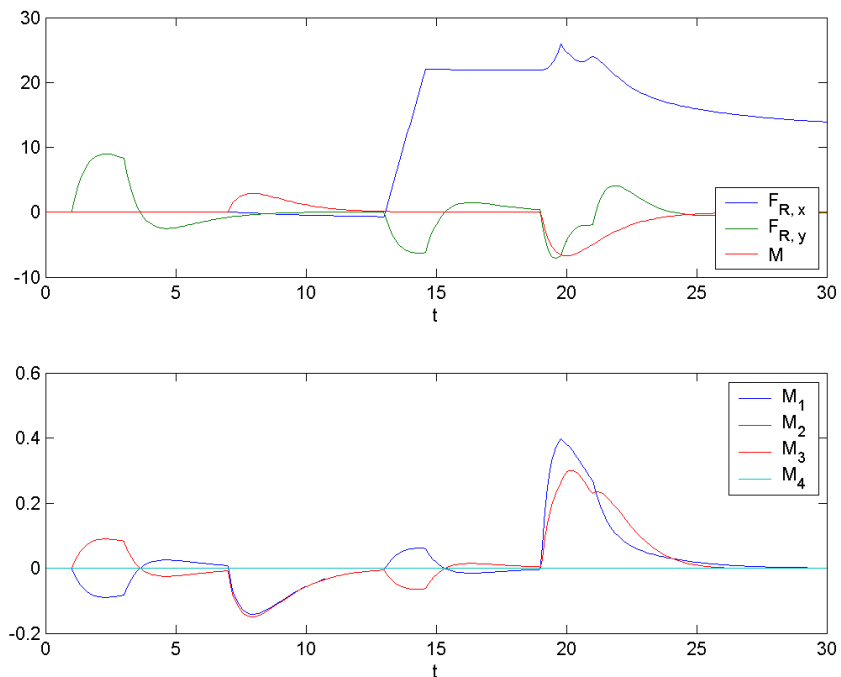


Abb. 16: Stellgrößenverlauf im Testfall bei Ausfall des zweiten und vierten Antriebs

Der Vollständigkeit halber sei noch der extreme Fall erwähnt, daß nur ein Antrieb aktiv ist. Unter dieser Vorgabe ist der hier verwendete Regler chancenlos, sein Ziel zu erreichen (s. Abb. 17).

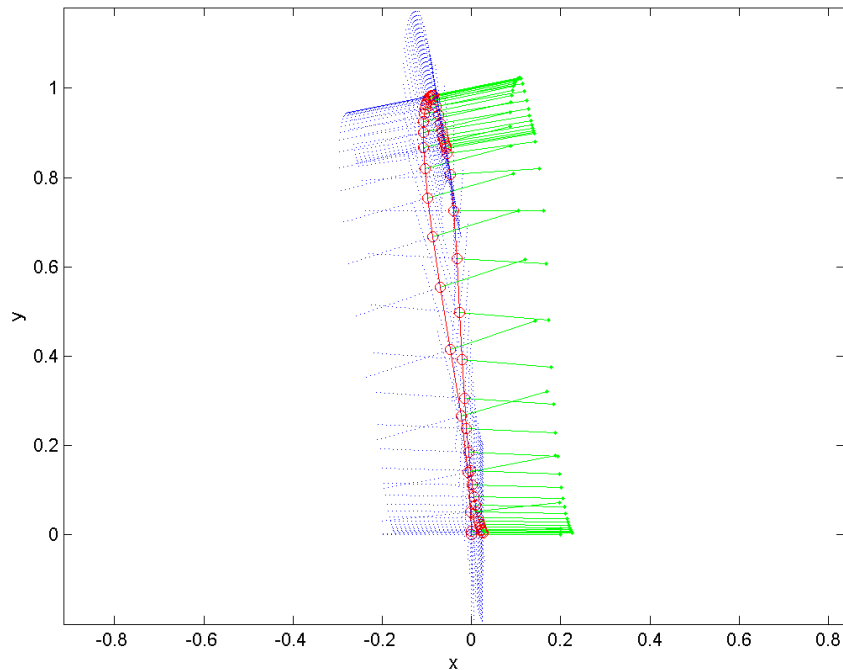


Abb. 17: Bewegungsablauf im Testfall bei Ausfall des zweiten, dritten und vierten Antriebs

2.1.6 abschließende Beurteilung

In den vorherigen Kapiteln wurde gezeigt, daß es für Fahrwerke mit omnidirektionalen Rädern sehr einfach ist, einen allgemeingültigen (modellbasierten) Regelalgorithmus zu finden. Dieser ist bei vorhandener Redundanz und geeigneter Information über den Fahrwerkszustand außerdem in der Lage, dem System eine gewisse Ausfalltoleranz zu verleihen.

Die Tatsache, daß dieser Algorithmus nur bei Fahrwerken ohne kinematische Beschränkungen, d.h. omnidirektionalen Fahrwerken, verwendet werden kann, ist allerdings eine wesentliche Einschränkung für die reale Anwendung. In der Praxis ist es nämlich leider nur in den seltensten Fällen möglich, ein Fahrwerk mit omnidirektionalen Rädern zu versehen. Die Gründe dafür sind vielfältig: Einerseits sind Fahrwerke mit omnidirektionalen Rädern technisch wesentlich komplizierter als solche mit kinematischen Beschränkungen (durch gewöhnliche Räder) und daher nicht für jede Anwendung skalierbar. Andererseits entstehen eben dadurch auch unverhältnismäßig hohe Kosten gegenüber einem „gewöhnlichen“ Fahrwerk mit festen und gelenkten Rädern.

Nicht zu vernachlässigen ist auch die Tatsache, daß die Spurführung aufgrund der fehlenden kinematischen Beschränkungen allein durch die Antriebskräfte bewerkstelligt werden muß. Dagegen weisen Fahrwerke mit festen und gelenkten Rädern schon von Natur aus eine höhere Fahrstabilität auf.

Ein weiterer Schwachpunkt der oben vorgestellten Methode ist die Notwendigkeit, die Lage des Massenmittelpunkts sowie Masse und Trägheitsmoment des Gesamtsystems zu kennen.

Alle diese Größen können sich, beispielsweise durch die Aufnahme von Lasten, im Betrieb verändern und sind nur mit zusätzlichem Aufwand zu ermitteln.

2.2 zweiter Lösungsansatz (kinematische Betrachtung)

Aufgrund der in Kap. 2.1.6 genannten Nachteile der ersten Methode wird ein neuer Weg gesucht, um zu einem modellbasierten Regelalgorithmus zu gelangen.

Ein erster Schritt zur Vereinfachung des Problems ist der Übergang von der Radmomentenvorgabe zur Raddrehzahlvorgabe. Dies bedeutet, daß jeder Radantrieb statt eines Drehmomentreglers einen Drehzahlregler erhält (zumindest nach außen, zur übergeordneten Ebene hin). Damit kann das oben erwähnte Problem des unbekanntenen Massenmittelpunkts etwas aus dem Blickfeld geschoben werden. Außerdem müssen die tatsächlich an den Kontaktpunkten auftretenden Kräfte nicht betrachtet werden. Diese sind ja bei Rädern mit kinematischen Beschränkungen nicht nur von den Antriebsmomenten abhängig.

Wie bereits erwähnt, soll es schlußendlich auch möglich sein, Fahrwerke mit gelenkten Rädern zu regeln. Das bedeutet nicht nur, daß jedes Rad mit einer Regelung für den Lenkwinkel versehen werden muß, sondern daß auch für diese Regelungen die entsprechenden Führungsgrößen zu ermitteln sind. Da nun kinematische Beschränkungen vorliegen, sind die Lenkstellungen und –bewegungen so zu koordinieren, daß diese Beschränkungen eingehalten werden (d.h. idealerweise kein Schlupf in Achsrichtung eines Rads) und die Bewegungsfähigkeit des Fahrwerks aufrechterhalten wird (d.h. keine Räder, die sich aufgrund ihrer Lenkstellung gegenseitig sperren).

2.2.1 Modell des Fahrwerks

Ebenso wie bei der in Kapitel 2.1 vorgestellten Methode ist es auch hier zunächst notwendig, einen geeigneten Weg zu finden, um die Eigenschaften des Fahrwerks in einem Modell zusammenzufassen. Von besonderer Bedeutung sind in diesem Fall die kinematischen Beschränkungen, die aufgrund der Struktur des Fahrwerks für die Bewegungen des Roboters gelten.

Um diese Beschränkungen ermitteln zu können, werden im folgenden zunächst die einzelnen Arten von Rädern hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf das gesamte Fahrwerk betrachtet. Die folgenden Ausführungen in diesem Kapitel beruhen auf dem Buch von SIEGWART und NOURBAKSH ([SIE-NOU-2004], S. 54ff).

2.2.1.1 kinematische Beschränkungen der Räder

Um die mathematische Beschreibung zu erleichtern, werden einige vereinfachende Annahmen getroffen: Die Ebene, in der ein Rad liegt, soll immer senkrecht stehen. Außerdem soll jedes Rad nur einen Kontaktpunkt mit dem Untergrund haben. Es wird davon ausgegangen, daß an diesem Kontaktpunkt kein Schlupf auftritt, weder in Richtung der Rollbewegung noch quer dazu (in Richtung der Radachse). Das Rad führt also eine reine Rollbewegung aus und gleichzeitig möglicherweise eine Rotation um die Hochachse (Lenkachse), die durch den Kontaktpunkt geht.

Somit können für jede Art von Rädern zwei Bedingungen angegeben werden: Eine Rollbedingung, die das feste Verhältnis von Rotation und zurückgelegter Strecke (in der Radebene) berücksichtigt, und eine Gleitbedingung, die keine Bewegung quer zur Rollbewegung (d.h. orthogonal zur Radebene) zuläßt.

2.2.1.1.1 festes Rad

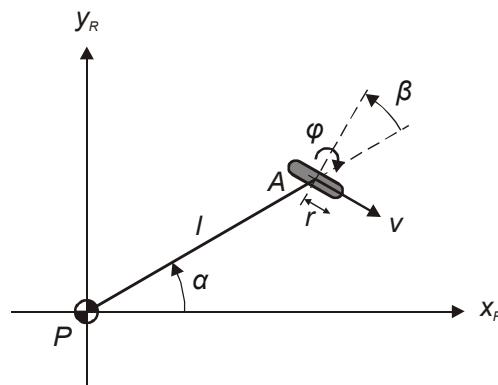


Abb. 18: Parameter des festen Rads

Das feste Rad ist fix am Fahrwerksrahmen angebracht, es ist also sowohl seine Position im lokalen Bezugssystem als auch sein Anstellwinkel im Normalbetrieb festgelegt. Daher ist am Kontaktpunkt nur Translation in der Radebene sowie Rotation um diesen möglich.

In Abb. 18 ist ein festes Rad A im lokalen Bezugssystem dargestellt. Die Position von A wird in Polarkoordinaten angegeben (l, α) . Mit β wird der Anstellwinkel des Rads bezeichnet, mit r der Radius desselben. Da sich das Rad um seine horizontale Achse drehen kann, ist sein Drehwinkel $\varphi(t)$ eine Funktion der Zeit.

Die Rollbedingung erzwingt, daß einer Bewegung in Richtung der Radebene ausschließlich eine Rotation des Rades entspricht:

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cdot \cos \beta] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_l - r \dot{\varphi} = 0. \quad (2.46)$$

Der erste Term der Summe verkörpert die Bewegung des Kontaktpunkts in der Radebene, wobei die drei Elemente des linken Vektors die drei Freiheitsgrade (\dot{x}_R , \dot{y}_R und $\dot{\theta}$) entsprechend der Radstellung gewichten. Mit dem Term $\mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I$ wird die Bewegung entsprechend Gleichung (1.3) im lokalen Bezugssystem angegeben, da sich ja auch die anderen Parameter auf das lokale Koordinatensystem beziehen. Diese Bewegung muß der Strecke $r\dot{\varphi}$, die das rollende Rad zurücklegt, entsprechen.

Analog dazu stellt die Gleitbedingung sicher, daß die Geschwindigkeitskomponente normal zur Radebene zu jeder Zeit Null ist:

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \cdot \sin \beta] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I = 0. \quad (2.47)$$

2.2.1.1.2 gelenktes Rad

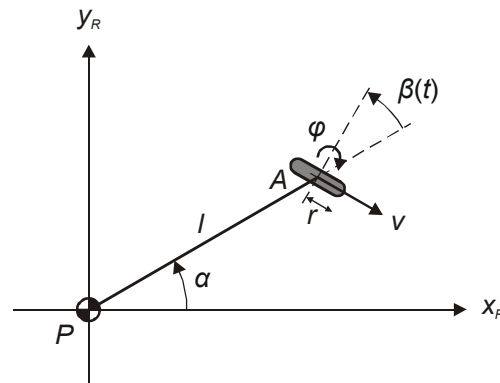


Abb. 19: Parameter des gelenkten Rads

Das gelenkte Rad (s. Abb. 19) weicht vom festen Rad nur in der Hinsicht ab, daß es über einen weiteren Freiheitsgrad verfügt: Es kann um eine Lenkachse (Hochachse) durch den Kontaktpunkt rotiert werden. Daher sind auch die beiden kinematischen Bedingungen identisch mit jenen des festen Rads, mit der einen Ausnahme, daß der Anstellwinkel des Rads nun eine Funktion der Zeit ist: $\beta(t)$.

Für Roll- und Gleitbedingung gilt daher

$$[\sin(\alpha + \beta(t)) \quad -\cos(\alpha + \beta(t)) \quad -l \cdot \cos \beta(t)] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0, \quad (2.48)$$

$$[\cos(\alpha + \beta(t)) \quad \sin(\alpha + \beta(t)) \quad l \cdot \sin \beta(t)] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I = 0. \quad (2.49)$$

Im Gegensatz zu $\dot{\varphi}$ hat $\dot{\beta}$ keinen direkten Einfluß auf die momentan geltenden kinematischen Beschränkungen eines Fahrwerks. Entscheidend dafür ist das zeitliche Integral darüber, der Lenkwinkel β .

2.2.1.1.3 Schwenkrad

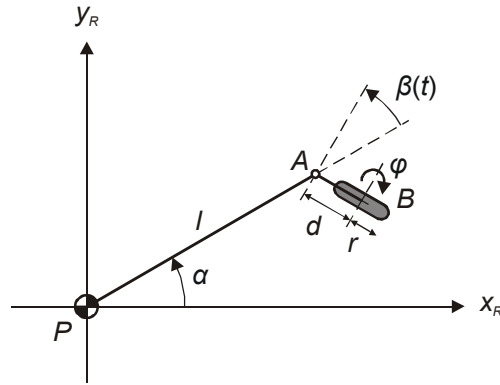


Abb. 20: Parameter des Schwenkrads

Auch Schwenkräder besitzen eine vertikale Achse, um die sie rotieren können. Im Gegensatz zum gelenkten Rad geht diese jedoch nicht durch den Kontaktpunkt des Rads. Dieser liegt nun an der Stelle B , während sich am Punkt A ein frei bewegliches Gelenk befindet. Die Verbindung \overline{AB} mit der Länge d ist starr und liegt in der Radebene.

Die Rollbedingung des Schwenkrads ist identisch mit Gleichung (2.48), da der Versatz um d bei einer Bewegung in der Radebene keine Rolle spielt:

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cdot \cos \beta] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_l - r \dot{\varphi} = 0. \quad (2.50)$$

Sehr wohl einen Einfluß hat die geänderte Geometrie auf die Gleitbedingung. Entscheidend ist, daß seitliche Kräfte im Punkt A einwirken, während der Kontaktpunkt des Rads verschoben an der Stelle B liegt. Eine Bedingung, die die seitliche Bewegung in Punkt A nicht zuließe, wäre daher falsch. Statt dessen muß eine Bedingung ähnlich der Rollbedingung verwendet werden, die seitliche Bewegungen in Punkt A durch entsprechende Rotationen des Rads um die Hochachse (durch B) kompensiert:

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \cdot \sin \beta] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_l + d \dot{\beta} = 0. \quad (2.51)$$

Im Gegensatz zum gelenkten Rad bewirkt beim Schwenkrad auch ein $\dot{\beta}$ eine Bewegung des Fahrwerks, wie aus Gleichung (2.51) ersichtlich ist.

Eine weitere Konsequenz aus den Gleichungen (2.50) und (2.51) ist, daß für beliebige Fahrwerksbewegungen $\dot{\xi}_l$ ein Wert für die Raddrehzahl $\dot{\varphi}$ und die „Lenkdrehzahl“ $\dot{\beta}$ existieren, sodaß diese Bedingungen eingehalten werden. Ein Roboter, der nur Schwenkräder besitzt, kann daher beliebige Bewegungen ausführen. Solche Systeme werden als omnidirektional bezeichnet. Ein alltägliches Beispiel dafür sind Schreibtischstühle, deren „Fahrwerk“ üblicherweise aus fünf derartigen Räder besteht.

2.2.1.1.4 omnidirektionales Rad

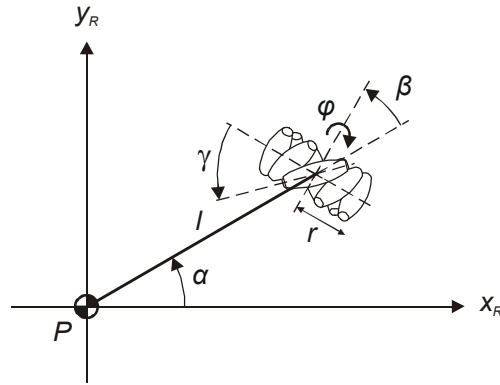


Abb. 21: Parameter des omnidirektionalen Rads

Omnidirektionale Räder haben zwar keine (vertikale) Lenkachse, ermöglichen aber trotzdem omnidirektionale Bewegungen wie die oben beschriebenen Schwenkräder. Dies wird gegenüber dem festen Rad durch einen zusätzlichen Freiheitsgrad ermöglicht. Omnidirektionale Räder besitzen, verteilt über den gesamten Umfang, Rollen, deren Achsen nicht mit der Radachse parallel sind (s. Abb. 21). Da diese Rollen frei rotieren können, wird durch Kombination von Raddrehzahl und Rollendrehzahl jede Bewegungsrichtung im Kontaktpunkt A möglich. Die verschiedenen Bauformen unterscheiden sich u.a. im Winkel γ zwischen den Achsen der Rollen und der Radachse.

Die kinematischen Beschränkungen des omnidirektionalen Rads hängen von diesem Winkel γ ab. Die Rollbedingung wird so aufgestellt, daß sie für den Fall (die Bewegungsrichtung) gilt, daß die Drehzahl der Rollen Null ist:

$$[\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad -\cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad -l \cdot \cos(\beta + \gamma)] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I - r\dot{\phi} \cdot \cos \gamma = 0. \quad (2.52)$$

Normal dazu ist die Bewegung nicht beschränkt, da die frei rotierenden Rollen diese Bewegung ermöglichen:

$$[\cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad \sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cdot \sin(\beta + \gamma)] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I - r\dot{\phi} \cdot \sin \gamma - r_R \dot{\phi}_R = 0. \quad (2.53)$$

Dabei ist r_R der Radius und $\dot{\phi}_R$ die Winkelgeschwindigkeit der Rollen.

Für den Fall $\gamma = 0$ reduziert sich die Rollbedingung (2.52) zu Gleichung (2.46), der Rollbedingung des festen Rads. Aufgrund der frei beweglichen Rollen existiert keine kinematische Beschränkung für Bewegungen in Richtung der Radachse, das Rad ist omnidirektional. In diesem speziellen Fall ist die Bewegung außerdem entkoppelt, da die Rollen und das Rad selbst zwei orthogonale Geschwindigkeitsrichtungen bedienen.

Im anderen Extremfall, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, sind Rad- und Rollachsen parallel. Setzt man diesen Wert in Gleichung (2.52) ein, erhält man die Gleitbedingung des festen Rads (2.47), d.h. die Rollen ermöglichen keine zusätzliche Bewegungsfreiheit normal zur Radebene. Außerdem muß sich das Rad selbst nie drehen und die Rollbedingung verschwindet. Diese degenerierte Form des omnidirektionalen Rads wird daher im folgenden ausgeschlossen durch die Annahme $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$.

2.2.1.1.5 Kugelrad

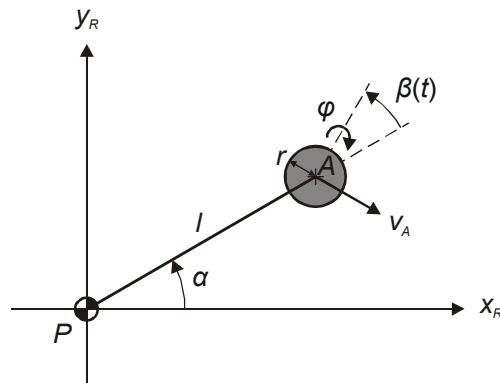


Abb. 22: Parameter des Kugelrads

Die letzte behandelte Art, das Kugelrad, schränkt die Bewegung in keiner Weise ein. Es hat keine bestimmte Rotationsachse, deshalb existieren auch keine geeigneten Roll- und Gleitbedingungen. Genauso wie das Schwenkrad und das omnidirektionale Rad ist es eindeutig omnidirektional. Gleichung (2.54) beschreibt daher die Winkelgeschwindigkeit der Kugel in Bewegungsrichtung (v_A) des Punktes A :

$$[\sin(\alpha + \beta) \quad -\cos(\alpha + \beta) \quad -l \cdot \cos \beta] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_l - r\dot{\varphi} = 0. \quad (2.54)$$

Die Geschwindigkeit normal dazu wird per Definition Null gesetzt:

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \cdot \sin \beta] \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_l = 0. \quad (2.55)$$

Man sieht, daß diese Gleichungen mit denen des festen Rads exakt übereinstimmen. Sie müssen aber völlig anders interpretiert werden: Das Kugelrad kann sich in beliebige Richtungen bewegen, somit ist die Bewegungsrichtung, die durch β repräsentiert wird, eine freie Variable, die aus Gleichung (2.55) folgt.

2.2.1.2 kinematische Beschränkungen des Fahrwerks

Mit Hilfe der in Kap. 2.2.1.1 angegebenen Gleichungen können die kinematischen Beschränkungen für ein Fahrwerk mit m (möglicherweise verschiedenartigen) Rädern bestimmt werden: Geht man davon aus, daß jedes Rad eine, mehrere oder aber keine Beschränkungen der

Bewegung des Roboters bewirkt, kann dies durch entsprechende Kombination aller kinematischen Beschränkungen der Räder geschehen.

Die verschiedenen Räder lassen sich, wie oben beschrieben, in fünf Kategorien einteilen: feste und gelenkte Räder, Schwenkräder, omnidirektionale Räder und Kugelräder. Die letzten drei davon beschränken, wie in den Kapiteln 2.2.1.1.3, 2.2.1.1.4 und 2.2.1.1.5 erwähnt, aufgrund von internen Freiheitsgraden dieser Räder die Bewegung $\dot{\xi}_I$ des Roboters nicht.

Daher sind für die Kinematik des Roboterfahrwerks nur feste und gelenkte Räder von Bedeutung. Die Anzahl dieser (Beschränkungen verursachenden) Räder wird mit n bezeichnet, wobei sich diese aus der Anzahl der festen Räder n_f und der Anzahl der gelenkten Räder n_s zusammensetzt. Mit $\beta_s(t)$ werden die variablen Lenkwinkel der gelenkten Räder bezeichnet, während die fixen Anstellwinkel der festen Räder die Bezeichnung β_f erhalten. Ebenso werden für die Drehwinkel der festen und der gelenkten Räder die Vektoren $\varphi_f(t)$ und $\varphi_s(t)$ eingeführt, die im Verbundvektor $\varphi(t)$ zusammengesetzt werden:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Damit können die Rollbedingungen aller Räder in folgendem Gleichungssystem gesammelt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{J}_1(\beta_s) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_I - \mathbf{J}_2 \dot{\varphi} = \mathbf{0}. \quad (2.57)$$

Gleichung (2.57) erinnert stark an die Rollbedingung eines einzelnen Rades, wobei anstelle von Vektoren Matrizen vorkommen, die alle Räder berücksichtigen. \mathbf{J}_2 ist eine konstante Diagonalmatrix, die die Radien r aller festen und gelenkten Räder enthält. Die Projektionsmatrix $\mathbf{J}_1(\beta_s)$ verknüpft die Bewegungsrichtung der Räder mit der Ausrichtung der jeweiligen Radebenen:

$$\mathbf{J}_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1f} \\ \mathbf{J}_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

$\mathbf{J}_1(\beta_s)$ ist nur von den Lenkwinkeln der gelenkten Räder abhängig, da nur diese Zeitfunktionen sind. Daher ist \mathbf{J}_{1f} eine konstante Projektionsmatrix für die festen Räder mit der Dimension $(n_f \times 3)$. Jede Zeile enthält den in Gleichung (2.46) ausgedrückten (1×3) -Vektor für

das jeweilige Rad. Analog dazu enthält die Matrix $\mathbf{J}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$ mit der Dimension $(n_s \times 3)$ zeilenweise dieselben Vektoren für die gelenkten Räder.

Insgesamt repräsentiert Gleichung (2.58) die Bedingung, daß jedes Rad sich entsprechend seiner Bewegung um seine horizontale Achse drehen muß.

Auf dieselbe Art und Weise werden die Gleitbedingungen aller festen und gelenkten Räder zusammengefaßt. Man erhält eine Gleichung mit derselben Struktur wie die Gleichungen (2.47) und (2.49):

$$\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_I = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

mit

$$\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} \\ \mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Dieses Gleichungssystem enthält somit die Bedingung, daß keines der festen und gelenkten Räder eine Bewegung normal zu seiner Radebene ausführt. Diese Bedingung hat daher die größte Bedeutung für die Manövrierbarkeit eines Roboterfahrwerks.

Analog zu den Matrizen der Rollbedingung enthalten die Matrizen \mathbf{C}_{1f} und $\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$ (Dimension $(n_f \times 3)$ bzw. $(n_s \times 3)$) die in den Gleitbedingungen (2.47) und (2.49) aller festen und gelenkten Räder vorkommenden (1×3) -Vektoren.

Aufgrund ihrer Bedeutung für den modellbasierten Regelalgorithmus werden diese Vektoren im folgenden mit \mathbf{c}_{1f} und $\mathbf{c}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$ bezeichnet.

2.2.2 mögliche Bewegungen – Momentanpol

Wie in der Einleitung bereits ausgeführt wurde, ist es eine der wesentlichen Aufgaben des in dieser Arbeit zu entwickelnden Algorithmus, dem übergeordneten System Informationen über die möglichen Bewegungen des Fahrwerks im aktuellen Zustand bereitzustellen. Eine Methode, um diese möglichen Bewegungen zu ermitteln, soll in diesem Kapitel entwickelt werden.

Bewegungen in der Ebene können durch einen Vektor $\dot{\boldsymbol{\xi}}_I = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]^T$ vollständig beschrieben werden. Eine alternative Möglichkeit dazu ist die Angabe des sogenannten Momentanpols. Der Momentanpol ist jener Punkt in der Ebene, an dem der Vektor der translatorischen Geschwindigkeit Null ist. Dieser kann innerhalb oder außerhalb des Fahrwerks liegen.

Kommt der Momentanpol über einen gewissen Zeitraum auf demselben Punkt zu liegen, so führt der Roboter in dieser Zeit eine Fahrt auf einer Kreisbahn aus. Im Grenzfall, daß sich der Momentanpol im Unendlichen befindet, degeneriert diese zu einer Geraden. Bei allgemeinen Bewegungen wandert der Momentanpol, und zwar aus dem Inertialsystem betrachtet auf der Rastpolkurve (Raumzentrode), aus dem lokalen Bezugssystem gesehen auf der Gangpolkurve (Körperzentrode). Während der Bewegung rollt letztere auf der ersten ab.

Die einzige Information, die dem Momentanpol nicht entnommen werden kann, ist die Geschwindigkeit, mit der eine Bewegung abläuft.

Es kann aber nicht nur eine beliebige Bewegung anhand der Lage des Momentanpols beschrieben werden (vgl. für die folgenden Ausführungen [SIE-NOU-2004], S. 67ff):

Gleichung (2.59) faßt die Gleitbedingungen der einzelnen Räder zusammen. Da diese für jedes Rad einzeln gültig sind, kann das Gleichungssystem (2.59) in eines für die festen Räder

$$\mathbf{C}_{1f} \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_I = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

und eines für die gelenkten Räder aufgeteilt werden:

$$\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_I = \mathbf{0} . \quad (2.62)$$

Damit diese beiden Bedingungen eingehalten werden, muß der Bewegungsvektor $\mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_I$ zum Nullraum (Kern) der Projektionsmatrix $\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s)$, einer Kombination von \mathbf{C}_{1f} und $\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)$, gehören.

Auch die kinematischen Beschränkungen, die für ein Fahrwerk aufgrund seiner Struktur gelten, können mit dem Konzept des Momentanpols formuliert werden.

Betrachtet man ein einzelnes festes oder gelenktes Rad, so darf dieses aufgrund der Gleitbedingung (2.47) bzw. (2.49) keine seitliche Bewegung aufweisen. Dies läßt sich geometrisch darstellen, indem die Radachse durch eine Gerade verlängert wird. Die Geschwindigkeit entlang dieser Geraden muß zu jedem Zeitpunkt Null sein. Das bedeutet, daß sich das Rad nur entlang eines Kreises bewegen kann, dessen Mittelpunkt (Momentanpol) auf dieser Achsgeraden liegt. Ist der Radius unendlich groß, dann bewegt sich das Rad entlang einer Geraden normal zur Achsgeraden.

Ein Fahrwerk kann aus beliebig vielen Rädern bestehen, es muß aber immer einen einzigen Momentanpol besitzen.

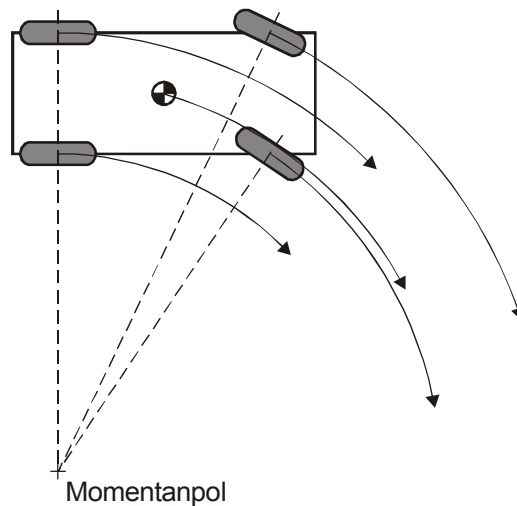


Abb. 23: Momentanpol bei einem Fahrwerk mit ACKERMANN-Lenkung

Schneiden sich alle Achsgeraden eines Fahrwerks in einem Punkt, so existiert eine gültige Lösung für dessen Bewegung, da der Momentanpol an diesem Punkt liegt, wie in Abb. 23 dargestellt. Dort ist auch eine Bewegung um -45° angedeutet

Es kann aber auch der Fall auftreten, daß, wie beim differential-drive-Fahrwerk in Abb. 24, alle Achsgeraden identisch sind. Der Momentanpol ist hier nicht auf einen Punkt beschränkt, sondern kann sich, abhängig von den beiden Raddrehzahlen, auf dieser Geraden bewegen.

Nimmt man beim Roboter in Abb. 23 mit ACKERMANN-Lenkung der Vorderräder (sinnvollerweise) an, daß nur die hinteren Räder fest sind, so gilt für dieses Fahrwerk natürlich dasselbe. Es muß allerdings immer sichergestellt werden, daß 1.) die Lenkwinkel der beiden Vorderräder so einander angepaßt sind, daß sich für das gesamte Fahrwerk ein Momentanpol auf der Verlängerung der Hinterachse ergibt. 2.) müssen selbstverständlich auch alle Raddrehzahlen diesem Momentanpol entsprechen. Bei gewöhnlichen PKW beispielsweise wird die erste Bedingung mit Hilfe einer geeigneten Mechanik (Lenktrapez bei der Achsschenkellenkung), die zweite einerseits durch ein Differentialgetriebe, andererseits durch nicht angetriebene (d.h. frei rotierbare) Räder eingehalten.

2.2.2.1 mögliche Lage des Momentanpols

Geht man davon aus, daß alle gelenkten Räder so gestellt werden können, daß diese zu den kinematischen Beschränkungen der festen Räder keine weiteren hinzufügen, dann ist der Raum der prinzipiell möglichen Bewegungen des Fahrwerks durch den Nullraum (Kern) von \mathbf{C}_{1f} gegeben. Ist die Bewegung $\mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\xi}_f$ in diesem enthalten, so wird Gleichung (2.61) erfüllt. Natürlich muß im weiteren auch Gleichung (2.62) (für die gelenkten Räder) eingehalten

werden, aber das kann ja durch entsprechende Lenkwinkel der gelenkten Räder erreicht werden.

$\text{Rang}(\mathbf{C}_{1f})$ gibt somit an, wieviele unabhängige Beschränkungen aufgrund der festen Räder auf das Fahrwerk wirken.

Aufgrund der Dimension von \mathbf{C}_{1f} und wegen der beliebigen Anzahl lenkbarer Räder gilt für den Rang von \mathbf{C}_{1f} : $0 \leq \text{Rang}(\mathbf{C}_{1f}) \leq 3$. Der Fall $\text{Rang}(\mathbf{C}_{1f}) = 0$ tritt ein, wenn ein Fahrwerk kein einziges festes Rad aufweist. Damit ist es, bei entsprechender Ansteuerung eventuell vorhandener gelenkter Räder, omnidirektional. Im anderen Extrem, $\text{Rang}(\mathbf{C}_{1f}) = 3$, ist die Bewegung des Roboters vollständig beschränkt, d.h. weder Translation noch Rotation sind möglich.

2.2.2.1.1 Beispiel – differential-drive-Fahrwerk

Am Beispiel eines differential-drive-Fahrwerks, also eines Fahrwerks mit zwei festen Rädern auf einer Achse, sollen obige Behauptungen kurz verdeutlicht werden.

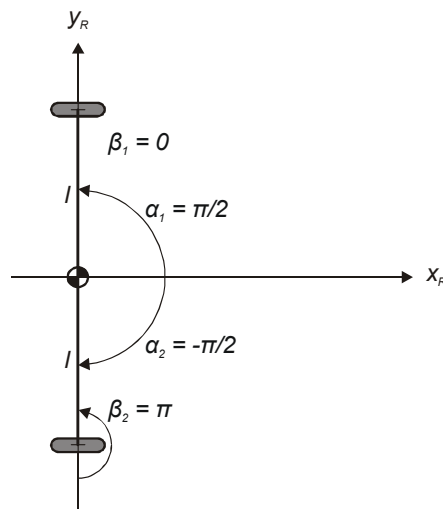


Abb. 24: differential-drive-Fahrwerk

Der Anstellwinkel des unteren Rads, $\beta_2 = \pi$, ist dabei deshalb so gewählt, weil dadurch eine Rotation des Rads in positiver Richtung eine Bewegung in Richtung der positiven x_R -Achse bewirkt.

Gemäß Gleichung (2.61) kann die Gleitbedingung der festen Räder aufgestellt werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + \beta_1) & \sin(\alpha_1 + \beta_1) & l \cdot \sin \beta_1 \\ \cos(\alpha_2 + \beta_2) & \sin(\alpha_2 + \beta_2) & l \cdot \sin \beta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{1f}} \cdot \dot{\xi}_R = \mathbf{0}. \quad (2.63)$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten ergibt dies

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems erhält man mit

$$\text{Kern}(\mathbf{C}_{1f}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.65)$$

d.h. die möglichen Bewegungen sind Translation in x_R -Richtung und Rotation um die Hochachse (θ) und jede beliebige Kombination der beiden. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß der Momentanpol einer Bewegung zu jeder Zeit auf der y_R -Achse liegen muß.

2.2.2.1.2 allgemeines Gleichungssystem für den Momentanpol

Da zunächst die mögliche Lage des Momentanpols gesucht ist, wird für den allgemeinen Fall eine etwas andere Vorgangsweise entwickelt. Es wurde oben bereits erwähnt, daß die Ermittlung der möglichen Lage des Momentanpols durch den Schnitt aller Achsgeraden der festen Räder geschehen kann. Dem entspricht das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Daher wird zunächst die Bestimmung der Achsengleichung eines Rads hergeleitet.

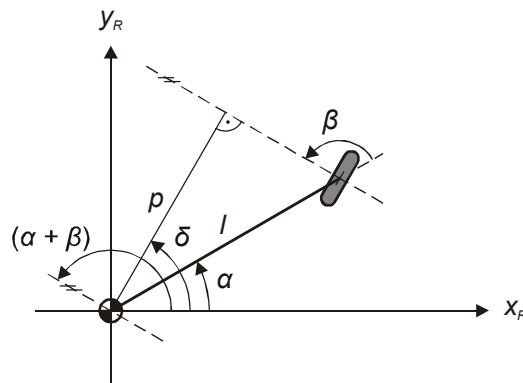


Abb. 25: zur Herleitung der Achsengleichung (HESSE'sche Normalform)

Aufgrund der Tatsache, daß die Lage eines Rads in Polarkoordinaten angegeben wird, bietet sich für diesen Zweck die HESSE'sche Normalform der Geradengleichung an (s. Abb. 25). Diese lautet in unserem Fall

$$x_R \cdot \cos \delta + y_R \cdot \sin \delta - p = 0. \quad (2.66)$$

(Vgl. [BAR-2001], S. 234f)

Der Winkel

$$\delta = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2} \quad (2.67)$$

kann in Abb. 25 abgelesen werden, ebenso die Beziehung

$$\cos(\delta - \alpha) = \frac{p}{l} \Leftrightarrow \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{p}{l}. \quad (2.68)$$

Aus dieser folgt der Parameter

$$p = l \cdot \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = l \cdot \sin \beta. \quad (2.69)$$

Setzt man nun die Gleichungen (2.67) und (2.69) in die Normalform (2.66) ein, so erhält man nach Umformungen die Achsengleichung

$$x_R \cdot \sin(\alpha + \beta) - y_R \cdot \cos(\alpha + \beta) - l \cdot \sin \beta = 0. \quad (2.70)$$

In vektorieller Form angeschrieben lautet sie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}}_{=: \bar{g}^T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_R = \underbrace{l \cdot \sin \beta}_p. \quad (2.71)$$

Interessant ist dabei der Vergleich mit dem Vektor \mathbf{c}_{1f} aus der Gleitbedingung (2.47) des festen Rads:

$$\mathbf{c}_{1f} = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}}_{=: \bar{c}_{1f}^T} \quad \underbrace{l \cdot \sin \beta}_p \right]. \quad (2.72)$$

In \mathbf{c}_{1f} steckt nämlich die Richtung von p bzw. die Richtung der Radebene, und zwar in dem mit \bar{c}_{1f}^T bezeichneten Teil; die Radachse mit dem in Gleichung (2.71) mit \bar{g}^T bezeichneten Richtungsvektor steht normal darauf (s. Abb. 26 und Gleichung (2.73)).

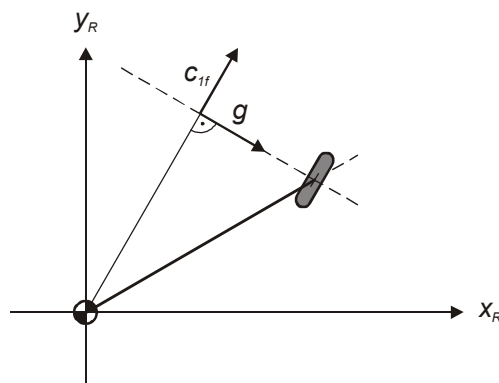


Abb. 26: Richtungsvektor der Radachse

Es gilt

$$\bar{c}_{1f} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \perp \bar{g} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) \\ -\cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Außerdem ist in \mathbf{c}_{1f} auch die Strecke p enthalten (s. Gleichung (2.72)).

Damit läßt sich die Achsengleichung (2.71) vereinfacht anschreiben als

$$\bar{g}^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_R = p. \quad (2.74)$$

Berücksichtigt man die Beziehung (2.73), so kann man \bar{g}^T durch den um $-\frac{\pi}{2}$ gedrehten Vektor \bar{c}_{1f}^T ersetzen:

$$\bar{c}_{1f}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_R = p. \quad (2.75)$$

Schreibt man diese Gleichung für jedes feste Rad an, so erhält man ein System von n_f Gleichungen. Um dieses in vektorieller Form anzugeben, ist es nützlich, die Matrix \mathbf{C}_{1f} zunächst in ihre drei Spaltenvektoren $\tilde{\mathbf{c}}_{1f,i}$ aufzuteilen:

$$\mathbf{C}_{1f} = [\tilde{\mathbf{c}}_{1f,1} \quad \tilde{\mathbf{c}}_{1f,2} \quad \tilde{\mathbf{c}}_{1f,3}]. \quad (2.76)$$

Damit lautet dieses Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{c}_{1f,1}^T \\ \bar{c}_{1f,2}^T \\ \vdots \\ \bar{c}_{1f,n_f}^T \end{bmatrix}}_{\substack{[\tilde{\mathbf{c}}_{1f,1} \quad \tilde{\mathbf{c}}_{1f,2}] \\ =\mathbf{G}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_R = \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n_f} \end{bmatrix}}_{\substack{[\tilde{\mathbf{c}}_{1f,3}] \\ =\mathbf{P}}}. \quad (2.77)$$

Der Inhalt der Matrix \mathbf{G} und des Vektors \mathbf{P} wird somit aus dem Vergleich mit der Matrix \mathbf{C}_{1f} gewonnen, denn in dieser sind die kinematischen Beschränkungen, die den Momentanpol bestimmen, zusammengefaßt.

Zusammengefaßt lautet damit das Gleichungssystem für die Bestimmung der möglichen Lage des Momentanpols

$$\mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_R = \mathbf{P}. \quad (2.78)$$

Die Matrix \mathbf{G} hat die Dimension $(n_f \times 2)$, wobei n_f die Anzahl der festen Räder ist.

2.2.2.1.3 Lösbarkeit des Gleichungssystems

Bei der Beurteilung der Lösbarkeit des Gleichungssystems (2.78) müssen einige Fälle unterschieden werden. Zunächst erfolgt eine Überprüfung anhand der Anzahl der festen Räder n_f bzw. der Anzahl der Zeilen des Gleichungssystems:

Ist $n_f = 0$ (Fall 1), d.h. das Fahrwerk besitzt kein festes Rad, dann liegen keine kinematischen Beschränkungen vor. Somit kann der Momentanpol durch entsprechende Wahl der Raddrehzahlen und Lenkwinkel an eine beliebige Stelle in der $x_R - y_R$ -Ebene gebracht werden.

Im Fall 2, d.h. $n_f > 0$, existiert mindestens ein festes Rad und damit wirkt auf das Fahrwerk mindestens eine kinematische Beschränkung. Dieser Fall kann, wie bei inhomogenen linearen Gleichungssystemen üblich, weiter unterteilt werden:

Gilt $\text{Rang}(\mathbf{G}) \neq \text{Rang}([\mathbf{G}, \mathbf{P}])$ (Fall 2.1), dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung. In unserer Anwendung bedeutet dies, daß die Achsen der festen Räder keinen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen.

Ist außerdem $\text{Rang}(\mathbf{G}) = 1$ (Fall 2.1.1), d.h. das Gleichungssystem besteht eigentlich nur aus einer linear unabhängigen Gleichung, dann sind alle Achsen der festen Räder zueinander parallel. Daher kann der Momentanpol nur im Unendlichen liegen und es sind nur Translationsbewegungen in eine bestimmte Richtung, nämlich normal zu den Radachsen, möglich.

Gilt dagegen $\text{Rang}(\mathbf{G}) > 1$ (Fall 2.1.2), dann schneiden sich die Achsgeraden der festen Räder nicht in einem Punkt, auch nicht im Unendlichen. Es existiert also kein gemeinsamer Momentanpol der festen Räder, somit ist keine wie immer geartete Bewegung des Roboters möglich.

Im Fall 2.2, d.h. $\text{Rang}(\mathbf{G}) = \text{Rang}([\mathbf{G}, \mathbf{P}])$, ist das Gleichungssystem lösbar. Das bedeutet, daß mindestens ein möglicher Momentanpol im Endlichen liegt.

Gilt dabei $\text{Rang}(\mathbf{G}) = n_f$ (Fall 2.2.1), dann besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung. Diese gibt den einzig möglichen Momentanpol vor. Der Roboter kann daher ausschließlich um diesen einen Punkt rotieren.

Ist hingegen $\text{Rang}(\mathbf{G}) < n_f$ (Fall 2.2.2), d.h. das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, dann ist der mögliche Bereich für den Momentanpol eine Gerade

in der $x_R - y_R$ -Ebene. Wo er tatsächlich zu liegen kommt, kann durch die Drehzahlen der angetriebenen Räder sowie durch die Lenkwinkel eventuell vorhandener gelenkter Räder festgelegt werden.

2.2.2.2 mögliche Bewegungen

Ein Nachteil der in Kapitel 2.2.2.1 entwickelten Vorgangsweise ist die Tatsache, daß deren Ergebnis – die mögliche Lage des Momentanpols – vom übergeordneten System nicht leicht verarbeitet werden kann. Außerdem wurde bisher davon ausgegangen, daß das Fahrwerk ausreichend aktuiert ist, sodaß alle kinematisch zulässigen Bewegungen auch durch die Antriebe angesteuert werden können.

Mit Hilfe von Methoden der linearen Algebra, angewandt auf die kinematischen Bedingungen (2.57) und (2.59), ist es jedoch möglich, äquivalente Informationen über die möglichen Bewegungen des Fahrwerks zu gewinnen. Die im folgenden präsentierte Vorgangsweise ist zwar weniger anschaulich als jene in Kapitel 2.2.2.1, liefert aber schlußendlich mehr bzw. präzisere Information, und das in einer Form, die für maschinelle Berechnungen besser geeignet ist.

Wie bereits in einem Beispiel in Kapitel 2.2.2.1.1 erwähnt, kann eine Basis für den Raum der kinematisch zulässigen Bewegungen über den Kern der Matrix aus der Gleitbedingung ermittelt werden:

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s)) \subseteq R^3. \quad (2.79)$$

Gleichung (2.57), die Rollbedingung des Fahrwerks, läßt sich umformen zu

$$\mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s) \cdot \underbrace{\mathbf{R}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}_I}_{\dot{\boldsymbol{\xi}}_R} = \dot{\boldsymbol{\phi}}. \quad (2.80)$$

Bei „Experimenten“ mit konkreten Zahlenwerten für die Geometrie omnidirektionaler Fahrwerke kann übrigens die Beobachtung gemacht werden, daß dieses Gleichungssystem sinngemäß der Beziehung (2.5) zwischen Radmomenten und resultierenden Größen in der in Kapitel 2.1 entworfenen ersten Methode zur modellbasierten Regelung eines Roboterfahrwerks entspricht (s. Beispiel in Kap. 2.2.2.2.1). Es gilt nämlich offensichtlich

$$\mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{A}^T. \quad (2.81)$$

Damit zeigt sich, daß die – zunächst von den kinematischen Beschränkungen ausgehende – zweite Methode in gewisser Weise eine Erweiterung der ersten ist. Der Beweis für Gleichung (2.81) ist dem Verfasser noch nicht gelungen.

Das Gleichungssystem (2.80) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Bewegung des Fahrwerks und den dazu notwendigen Raddrehzahlen. Tritt der Fall ein, daß gewisse Bewegungen nicht steuerbar sind, d.h. durch Antriebskräfte nicht bewirkt werden können, dann muß es Vektoren $\dot{\xi}_R$ geben, sodaß $\dot{\phi}_R = \mathbf{0}$ gilt. Eine Basis für diesen Raum der nicht steuerbaren Bewegungen kann ebenfalls mit dem Kern angegeben werden:

$$\bar{S} = \text{Kern}(\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s)) \subseteq R^3. \quad (2.82)$$

Die Matrix \mathbf{J}_2 (s. Gleichung (2.80)) wurde dabei schon weggelassen, da sie nur eine Diagonalmatrix der Radien der Räder ist und für die Beurteilung der Steuerbarkeit keine Rolle spielt.

Wenn nun die Schnittbasis von Z und \bar{S} leer ist, d.h.

$$Z \cap \bar{S} = \emptyset, \quad (2.83)$$

dann sind alle kinematisch zulässigen Bewegungen (gegeben durch Z) automatisch auch steuerbar, denn in diesem Fall liegt keine der nicht steuerbaren Bewegungen im Raum der kinematisch zulässigen. Um zu überprüfen, ob dieser Fall vorliegt, muß nur ermittelt werden, ob die Basisvektoren von Z und \bar{S} voneinander linear unabhängig sind. Damit dies zutrifft, muß gelten

$$\text{Rang}([\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}}]) = \text{Rang}(\mathbf{Z}) + \text{Rang}(\bar{\mathbf{S}}). \quad (2.84)$$

Solange diese Bedingung eingehalten wird, gilt folglich für den Raum der kinematisch zulässigen *und* steuerbaren Bewegungen

$$B = Z. \quad (2.85)$$

Andernfalls wird dieser Raum durch die Menge der nicht steuerbaren Bewegungen eingeschränkt. Dazu muß zunächst eine Basis für den Raum der steuerbaren Bewegungen ermittelt werden. Da die nicht steuerbaren Bewegungen (\bar{S}) bereits bekannt sind, kann eine Basis für den Raum der steuerbaren Bewegungen ganz einfach als Komplement von \bar{S} berechnet werden:

$$S = \text{Kern}(\bar{\mathbf{S}}^T) \subseteq R^3. \quad (2.86)$$

Dabei ist mit $\bar{\mathbf{S}}$ eine Matrix gemeint, die die Basisvektoren von \bar{S} spaltenweise enthält (vgl. [BUN-1985], S. 10).

Alternativ dazu könnte aus Gleichung (2.5) bzw. der (äquivalenten) umgeformten Rollbedingung (2.80) eine Basis für den Raum der steuerbaren Bewegungen berechnet werden:

$$S = \text{Bild}(\mathbf{A}) = \text{Bild}(\mathbf{J}_1^T(\boldsymbol{\beta}_s)) \subseteq R^3. \quad (2.87)$$

Man kann sich das Bild der Abbildung, die durch Gleichung (2.80) repräsentiert wird, als die Menge aller Bewegungsvektoren $\dot{\xi}_R$ vorstellen, die sich ergeben, wenn beliebige Vektoren ϕ für die Radmomente vorgegeben werden.

Wie oben bereits erwähnt, ist für das übergeordnete System der Raum der zulässigen *und* steuerbaren Bewegungen von entscheidender Bedeutung. Das sind jene Bewegungen, die beispielsweise von einem Positionsregler zum Ansteuern eines Ziels genutzt werden können. Eine Basis für diesen Raum ist die Schnittbasis von S und Z :

$$B = S \cap Z. \quad (2.88)$$

Die Berechnung der Schnittbasis zweier Basen kann mit Hilfe des Algorithmus von ZASSENHAUS durchgeführt werden (vgl. [ZAS-1948]). Sein Ablauf ist in einem Beispiel in 2.2.2.2.1 detailliert dargestellt.

Die zulässigen Bewegungen setzen sich zusammen aus den zulässigen steuerbaren und den zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen. Die Basis des Raums der zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen wird mit D bezeichnet.

$$Z = B \oplus D. \quad (2.89)$$

Dabei handelt es sich um eine direkte Summe, denn B und D sind komplementäre Räume (bzw. deren Basen) in Z . D ist daher „ Z ohne B “:

$$D = Z \setminus B \quad (2.90)$$

bzw.

$$D = Z \cap \bar{B}. \quad (2.91)$$

Für das Komplement von B gilt wiederum

$$\bar{B} = \text{Kern}(\mathbf{B}^T), \quad (2.92)$$

wobei \mathbf{B} die Matrix der Basisvektoren von B ist.

Bisher wurde eine allgemeine Schreibweise verwendet, die in der Realität so nur für Fahrwerke ohne gelenkte Räder angewendet werden kann, da sonst die symbolische Variable $\boldsymbol{\beta}_s$ für die Lenkwinkel der gelenkten Räder (nichtlinear) in den Gleichungssystemen auftritt.

Aus diesem Grund wird auf eine „qualitative“ Schreibweise übergegangen. Statt der Matrizen $\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_s)$ und $\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\beta}_s)$ werden jetzt \mathbf{J}_{1q} und \mathbf{C}_{1q} verwendet. Die Vektoren \mathbf{j}_{1q} und \mathbf{c}_{1q} zur Erzeugung dieser Matrizen sind in der folgenden Tabelle angegeben. Sie sind analog zum Vektor \mathbf{c}_{1f} zu verstehen (s. (2.72)).

Art	\mathbf{j}_{1q}	\mathbf{c}_{1q}	Anm.
festes Rad (bzw. gelenktes Rad bei Lenkungsausfall)	$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) \\ -\cos(\alpha + \beta) \\ -l \cdot \cos \beta \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \\ l \cdot \sin \beta \end{bmatrix}^T$	
festes Rad (bzw. gelenktes Rad bei Lenkungsausfall) bei Antriebsausfall	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \\ l \cdot \sin \beta \end{bmatrix}^T$	1
gelenktes Rad	$\begin{bmatrix} \sin \alpha & \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ -\cos \alpha & -\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ -l \cdot \cos 0 & -l \cdot \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	2
gelenktes Rad bei Antriebsausfall	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	1, 3
omnidirektionales Rad	$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ -\cos(\alpha + \beta + \gamma) \\ -l \cdot \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	
omnidirektionales Rad bei Antriebsausfall	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	1
Schwenkrad bzw. Kugelrad	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$	

Anmerkung 1: Beim Ausfall des Antriebs verliert das Rad die Steuerbarkeit, daher wird $\mathbf{j}_{1q} = \mathbf{0}$ gesetzt. Es wird davon ausgegangen, daß sich der ausgefallene Antrieb frei drehen läßt. Die kinematische Beschränkung bleibt erhalten.

Anmerkung 2: Ein gelenktes Rad kann die Translation des Kontaktpunkts abhängig vom Lenkwinkel in jede Richtung steuern, daher erhält \mathbf{J}_{1q} zwei (orthogonale) Zeilen für jedes gelenkte Rad. Da angenommen wird, daß das Rad aufgrund der Regelung immer „richtig“ ausgerichtet ist, entfällt die kinematische Beschränkung ($\mathbf{c}_{1q} = \mathbf{0}$).

Anmerkung 3: Der Kunstgriff, daß bei einem gelenkten Rad $\mathbf{c}_{1q} = \mathbf{0}$ gesetzt wird, verursacht leider später Schwierigkeiten bei der Interpretation der Ergebnisse, da nicht zwischen einem gelenkten Rad mit Antriebsausfall und z.B. einem omnidirektionalen Rad mit Antriebsausfall unterschieden werden kann.

2.2.2.2.1 Beispiel – Fahrwerk mit vier omnidirektionalen Rädern

Im folgenden werden am „alten“ RoboCup-Fahrwerk ähnliche „Experimente“ durchgeführt wie in Kap. 2.1.1.

Zunächst wird der Fall betrachtet, daß alle Antriebe ihre Funktion korrekt erfüllen. Dann gilt für die Matrizen der Rollbedingung (2.57) bzw. (2.80)

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & -0,2 \\ 0 & 1 & -0,2 \\ -1 & 0 & -0,2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Führt man die Multiplikation in (2.80) aus, erhält man

$$\mathbf{J}_2^{-1}\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -50 & -10 \\ 50 & 0 & -10 \\ 0 & 50 & -10 \\ -50 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Vergleicht man diese Matrix mit der Modellmatrix \mathbf{A} aus dem Beispiel in Kap. 2.1.1 (erste Methode)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 & -50 \\ -50 & 0 & 50 & 0 \\ -10 & -10 & -10 & -10 \end{bmatrix},$$

dann zeigt sich, daß diese beiden Matrizen bis auf die Transposition tatsächlich identisch sind, wie in (2.81) angegeben. Wie bereits erwähnt, hat \mathbf{J}_2 keine Bedeutung für die Beurteilung der Steuerbarkeit; daher wird im folgenden nur noch \mathbf{J}_1 verwendet.

Im aktuellen Fall existieren keine kinematischen Beschränkungen, \mathbf{C}_1 wäre daher leer. Aufgrund der Tabelle in Kap. 2.2.2.2 erhält man

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus läßt sich eine Basis für den Raum der zulässigen Bewegungen ermitteln. Da keine Beschränkungen vorliegen, ist das in diesem Fall der R^3 :

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Für die Rollbedingungen (in qualitativer Form) gilt

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & -0,2 \\ 0 & 1 & -0,2 \\ -1 & 0 & -0,2 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt für den Raum der nicht steuerbaren Bewegungen

$$\bar{S} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \emptyset,$$

d.h. alle Bewegungen sind steuerbar.

Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingung (2.84)

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_3 = \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_3 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_0$$

in diesem Fall gilt. Daraus folgt für den Raum der zulässigen und steuerbaren Bewegungen unmittelbar

$$B = Z = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Folglich ist die Basis der zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen im aktuellen Fall leer, was auch mit Hilfe des ZASSENHAUS-Algorithmus (s. nächstes Beispiel) berechnet werden kann:

$$D = Z \cap \bar{B} = \emptyset.$$

Das dafür notwendige Komplement von B wird folgendermaßen ermittelt:

$$\bar{B} = \text{Kern}(\mathbf{B}^T) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \emptyset.$$

Die Basen B und D können (erwartungsgemäß) so interpretiert werden, daß alle Bewegungen (kinematisch) zulässig und steuerbar sind.

Dasselbe Ergebnis erhält man mit dem gewählten Fahrwerk, wenn einer der Radantriebe ausfällt, da auch dann noch alle drei Freiheitsgrade bedient werden können.

In einem neuen Experiment sollen nun zwei Antriebe, nämlich die Antriebe 3 und 4, ausfallen, d.h. frei mitlaufen.

Die kinematischen Beschränkungen bleiben davon unberührt:

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dementsprechend gilt weiterhin für die Basis der kinematisch zulässigen Bewegungen

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Matrix der Rollbedingungen erhält für jeden ausgefallenen Antrieb eine Nullzeile:

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit ändert sich auch die Basis für den Raum der nicht steuerbaren Bewegungen zu

$$\bar{S} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

In diesem Fall ist die Bedingung (2.84) nicht mehr erfüllt

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_3 \neq \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_3 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_1.$$

Daher muß die Basis der zulässigen und steuerbaren Bewegungen als Schnittbasis von S und Z berechnet werden. Dazu wird zunächst die Basis der steuerbaren Bewegungen (S) als Komplement von \bar{S} ermittelt:

$$S = \text{Kern}(\bar{\mathbf{S}}^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Anhand der nun notwendigen Berechnung der Schnittbasis von S und Z wird der Ablauf des ZASSENHAUS-Algorithmus demonstriert. Zunächst werden die (transponierten) Vektoren der Erzeugendensysteme S und Z zeilenweise in die Matrix \mathbf{M}_Z eingetragen:

$$\mathbf{M}_Z = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{S}^T & \mathbf{S}^T & & \\ \mathbf{Z}^T & \mathbf{0} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nun wird \mathbf{M}_Z mit Hilfe einer geeigneten Methode in Zeilenstufenform gebracht:

$$\tilde{\mathbf{M}}_Z = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}^T & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{V}^T \end{array} \right].$$

Damit liegt das Ergebnis des Algorithmus bereits vor: U ist die (für uns uninteressante) Summenbasis, V die Schnittbasis von S und Z .

Daher gilt für die Basis der zulässigen und steuerbaren Bewegungen

$$B = S \cap Z = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Auf dieselbe Art und Weise werden die zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen ermittelt:

$$D = Z \cap \bar{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Das vorliegende Ergebnis mag für einen Pfadplaner o.ä. geeignet sein; für den Menschen hingegen ist es schwer interpretierbar, da in beiden Basisvektoren von B sowohl Translation als auch Rotation vorkommen. Sicher ist nur, daß es eine zulässige Bewegung gibt, die nicht steuerbar ist (s. B).

Da für ein und denselben Raum beliebig viele Basen angegeben werden können, müßte es allerdings möglich sein, eine Basis zu finden, die auf den ersten Blick leichter verständlich ist. Zu diesem Zweck werden die drei Freiheitsgrade vorübergehend folgendermaßen umsortiert:

$$\tilde{\xi}_R = \begin{bmatrix} \theta \\ x \\ y \end{bmatrix}_R.$$

Dementsprechend gilt für die umsortierten Basen:

$$\tilde{Z} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\tilde{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2 \\ -0,2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Berechnet man nun die Schnittbasis von \tilde{S} und \tilde{Z} , erhält man die (umsortierten) zulässigen und steuerbaren Bewegungen

$$\tilde{B} = \tilde{S} \cap \tilde{Z} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ebenso gilt für die (umsortierten) zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen:

$$\tilde{D} = \tilde{Z} \cap \tilde{\bar{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0,2 \\ -0,2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bringt man nun die Komponenten der Basisvektoren wieder in ihre ursprüngliche Reihenfolge, dann liegen neue Basen (für dieselben Räume wie oben) vor:

$$B = S \cap Z = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$D = Z \cap \bar{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, daß in B jetzt ein Basisvektor erkennbar ist, der ausschließlich eine translatorische Bewegung darstellt, nämlich entlang der ersten Mediane, wie bereits in Kap. 2.1.1 erwähnt. Eine unabhängige Rotation ist dagegen nicht möglich.

2.2.2.2.2 Beispiel – Fahrwerk mit drei gelenkten Rädern

Im Gegensatz zum ersten Lösungsansatz ist es mit der zweiten Methode möglich, auch Räder mit kinematischen Beschränkungen zu berücksichtigen. Dies soll am Beispiel des neuen RoboCup-Fahrwerks dargelegt werden. Dieses Fahrwerk besteht aus drei lenkbaren Rädern, die symmetrisch um den Fahrwerksmittelpunkt jeweils um 120° gegeneinander versetzt angeordnet sind, d.h. $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $\alpha_3 = -120^\circ$. Die übrigen Maße werden wie in den vorigen Beispielen angenommen.

Zunächst wird der Fall betrachtet, daß weder Rad- noch Lenkantriebe ausfallen. Da in dieser Situation die Radstellungen jeder gewünschten Bewegung angepaßt werden können, existieren scheinbar keine kinematischen Beschränkungen:

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus resultiert die Basis der zulässigen Bewegungen

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

In der Matrix für die Rollbedingung tritt nun die oben bereits erwähnte Besonderheit auf: Für jedes gelenkte Rad werden zwei (orthogonale) Zeilenvektoren eingetragen, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß durch entsprechende Lenkstellung jedes Rad eine Bewegung in beliebige Richtung ansteuern kann:

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,866 & 0,5 & -0,2 \\ -0,5 & 0,866 & 0 \\ -0,866 & 0,5 & -0,2 \\ -0,5 & -0,866 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit ist die Basis für den Raum der nicht steuerbaren Bewegungen leer:

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \emptyset.$$

Da die Bedingung (2.84)

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_3 = \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_3 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_0$$

im aktuellen Fall gilt, folgt für die Basis der zulässigen und steuerbaren Bewegungen

$$B = Z = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dementsprechend existieren keine zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen:

$$D = Z \cap \bar{B} = \emptyset.$$

Eine neue Situation tritt auf, wenn der Lenkantrieb des dritten Rads ausfällt, d.h. das dritte Rad zu einem festen wird. Es wird der Fall betrachtet, daß sein Lenkwinkel den festen Wert $\beta_3 = 30^\circ$ annimmt. Für die Gleitbedingung gilt dann

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Die Basis der zulässigen Bewegungen hat dadurch nur mehr die Dimension 2:

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

In der Matrix der Rollbedingung wird für das feste Rad nur eine Zeile angeschrieben:

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,866 & 0,5 & -0,2 \\ -0,5 & 0,866 & 0 \\ -1 & 0 & 0,173 \end{bmatrix}.$$

Die Basis für den Raum der nicht steuerbaren Bewegungen ist folglich leer:

$$\bar{S} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \emptyset.$$

Deshalb gilt wiederum Bedingung (2.84)

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_2 = \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_2 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_0$$

und für die Basis der zulässigen und steuerbaren Bewegungen folgt

$$B = Z = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Der Raum der zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen ist nach wie vor leer:

$$D = Z \cap \bar{B} = \emptyset.$$

Die (bereits mit zeitweise umsortierten Freiheitsgraden erhaltenen) Ergebnisse zeigen, daß einerseits eine rein translatorische Bewegung in Richtung der x_R -Achse möglich ist, andererseits eine Kombination der anderen beiden Freiheitsgrade. Dies entspricht einer Beschränkung der Lage des Momentanpols auf die Achsgerade des (nun festen) dritten Rads.

Für ein neues Experiment soll statt des Lenkantriebs der Radantrieb des dritten Rads ausfallen. Damit gilt für die Matrix der Gleitbedingung wieder

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Raum der zulässigen Bewegungen entspricht daher dem R^3 :

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Matrix der Rollbedingung erhält für das nicht antreibbare Rad eine Nullzeile:

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,866 & 0,5 & -0,2 \\ -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Basis für den Raum der nicht steuerbaren Bewegungen ist auch in diesem Fall leer

$$\bar{S} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \emptyset$$

und es gilt die Bedingung (2.84)

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_3 = \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_3 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_0.$$

Somit folgt für die Basis der zulässigen und steuerbaren Bewegungen

$$B = Z = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Entsprechend ist der Raum der zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen leer:

$$D = Z \cap \bar{B} = \emptyset.$$

Im folgenden Beispiel sollen die Veränderungen untersucht werden, die auftreten, wenn zusätzlich zum dritten Antrieb auch der zweite ausfällt. Da alle Räder lenkbar bleiben, gilt für die Gleitbedingung

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt für die Basis der zulässigen Bewegungen wiederum

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

In der Matrix der Rollbedingung kommen jetzt zwei Nullzeilen für die ausgefallenen Antriebe vor:

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ist die Basis für den Raum der nicht steuerbaren Bewegungen gegeben durch

$$\bar{S} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da diese Bewegung im Raum der kinematisch zulässigen Bewegungen liegt, ist die Bedingung (2.84) nicht mehr erfüllt:

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_3 \neq \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_1 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_0.$$

Deshalb muß die Basis der zulässigen und steuerbaren Bewegungen durch Schnitt von S und Z ermittelt werden:

$$B = S \cap Z = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

wobei in diesem Fall auch die Basis der zulässigen, aber nicht steuerbaren Bewegungen nicht leer ist:

$$D = Z \cap \bar{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Auch diese Ergebnisse wurden mit zeitweise umsortierten Freiheitsgraden erzielt. Die in D angegebene zulässige, aber nicht steuerbare Bewegung ist die Drehung um den Kontaktpunkt des einzigen noch funktionierenden Rads. Im Unterschied zum omnidirektionalen Fahrwerk ist diese Bewegung im allgemeinen nicht frei möglich, sondern nur, wenn alle gelenkten Räder dies durch ihre Lenkwinkel ermöglichen! Kombinationen dieser Bewegung mit steuerbaren Bewegungen wären steuerbar. Für den Momentanpol bedeutet das, daß dieser strenggenommen auf der ganzen Ebene zu liegen kommen darf, mit Ausnahme des Kontaktpunkts von Rad 1. Das oben angegebene Ergebnis hingegen läßt für die Lage des Momentanpols nur eine Gerade zu. Die Freiheit des Pfadplaners wird dadurch stärker als notwendig eingeschränkt. Grund dafür ist der in Kap. 2.2.2.2 angegebene, für die Modellierung gelenkter Räder benötigte Kunstgriff ($\mathbf{c}_{1q} = \mathbf{0}$).

In einem letzten Beispiel soll der Fall betrachtet werden, daß die Lenkantriebe 1 und 3 ausfallen ($\beta_1 = 30^\circ, \beta_2 = -30^\circ$), ebenso der Radantrieb 2. Dann gilt für die Matrix der Gleitbedingung

$$\mathbf{C}_{1q} = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,866 & -0,5 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt für die Basis der zulässigen Bewegungen

$$Z = \text{Kern}(\mathbf{C}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} -0,577 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,116 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Matrix der Rollbedingung lautet in diesem Fall

$$\mathbf{J}_{1q} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,866 & -0,173 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,866 & -0,173 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich eine nicht steuerbare Bewegung:

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{Kern}(\mathbf{J}_{1q}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1,732 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da diese nicht im Raum der zulässigen Bewegungen liegt, wird die Bedingung (2.84) eingehalten:

$$\underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{S}})}_3 = \underbrace{\text{Rang}(\mathbf{Z})}_2 + \underbrace{\text{Rang}(\bar{\mathbf{S}})}_1.$$

Somit kann der Raum der zulässigen und steuerbaren Bewegungen direkt angegeben werden:

$$B = Z = \left\{ \begin{bmatrix} -0,577 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0,116 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Folglich ist die Basis steuerbarer, aber nicht zulässiger Bewegungen leer:

$$D = Z \cap \bar{B} = \emptyset.$$

2.2.3 gewünschte Bewegung und Momentanpol

Da vom übergeordneten Positionsregler eine Stellgröße in der Form $\dot{\xi}_R = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\theta}]_R^T$ vorgegeben wird, muß daraus die dafür notwendige Lage des Momentanpols $\bar{x}_{M,R} = [x_M \quad y_M]_R^T$ bestimmt werden.

Für die Herleitung wird zunächst die Geschwindigkeit eines beliebigen Punkts P bestimmt (s. Abb. 27).

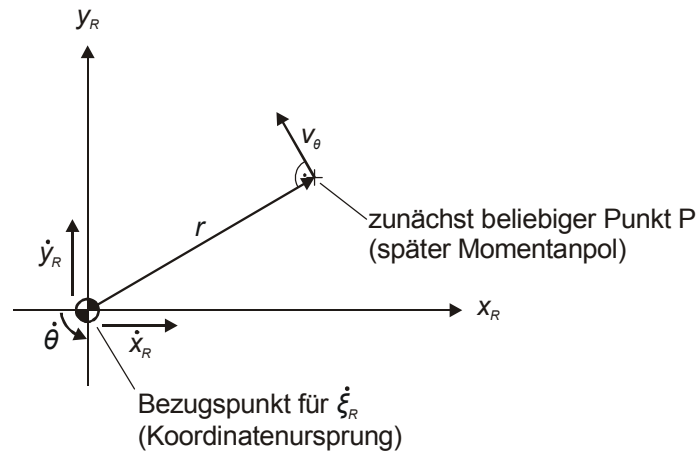


Abb. 27: Komponenten der Geschwindigkeit eines beliebigen Punkts

Diese setzt sich zusammen aus drei Komponenten, nämlich den translatorischen Geschwindigkeiten \dot{x}_R und \dot{y}_R und der Auswirkung der Rotation um die Hochachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$. Für letztere gilt

$$\bar{v}_\theta = \dot{\theta} \cdot \bar{r}^\perp. \quad (2.93)$$

Damit läßt sich die Geschwindigkeit im Punkt P folgendermaßen anschreiben:

$$\bar{v}_R = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_R = \underbrace{\dot{x}_R \cdot \bar{e}_{x,R}}_{\bar{v}_{x,R}} + \underbrace{\dot{y}_R \cdot \bar{e}_{y,R}}_{\bar{v}_{y,R}} + \underbrace{\dot{\theta} \cdot \bar{r}^\perp}_{\bar{v}_\theta}. \quad (2.94)$$

Für den Momentanpol gilt ja, wie oben bereits erwähnt

$$\bar{v}_{M,R} = \bar{0}, \quad (2.95)$$

d.h. alle Komponenten der Geschwindigkeit sind in diesem Punkt Null. Eingesetzt in Gleichung (2.94) und leicht verändert angeschrieben lautet diese dann

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_R + \dot{\theta} \cdot \begin{bmatrix} -y_M \\ x_M \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

Setzt man fürs erste $\dot{\theta} \neq 0$ voraus, so folgt daraus für den Momentanpol

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix}_R = \bar{x}_{M,R} = \frac{1}{\dot{\theta}} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}_R. \quad (2.97)$$

Damit ist eine Beziehung gegeben, mit deren Hilfe die notwendige Lage des Momentanpols berechnet werden kann, wenn ξ_R , der Sollwert der Bewegung, bekannt ist.

Im Sonderfall $\dot{\theta} = 0$ liegt reine Translation vor; der Momentanpol muß sich daher im Unendlichen befinden. In diesem Fall kann nur ein Vektor bestimmt werden, der in Richtung dieses

unendlich weit entfernten Momentanpols zeigt (s. Abb. 28). Seine Länge ist nicht von Bedeutung.

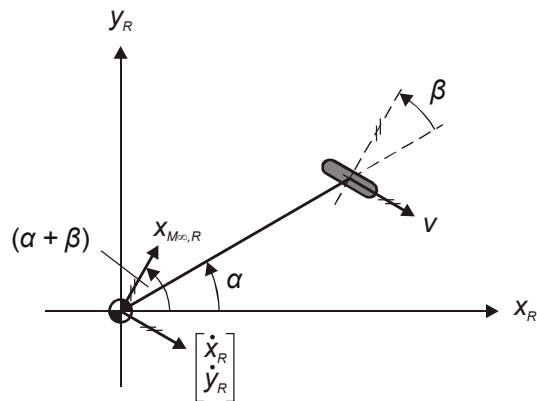


Abb. 28: Sonderfall Geradeausfahrt: Momentanpol im Unendlichen

Aus dieser Zeichnung ist leicht zu erkennen, daß dieser Vektor normal zur Bewegungsrichtung stehen muß. Daher lautet er

$$\bar{x}_{M^{\infty},R} = \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

2.2.4 Lenkwinkel und Raddrehzahlen

Mit den nun vorliegenden Informationen über den Momentanpol ist es ein leichtes, die Lenkwinkel der gelenkten Räder sowie die Raddrehzahlen aller angetriebenen Räder zu ermitteln, sodaß die vom übergeordneten System geforderte Bewegung erreicht wird.

2.2.4.1 Bestimmung des Lenkwinkels aus der Lage des Momentanpols

Um den Lenkwinkel β eines Rads zu bestimmen, werden nur dessen Parameter sowie die gewünschte Position des Momentanpols $\bar{x}_{M,R} = [x_M \quad y_M]_R^T$ benötigt (s. Abb. 29).

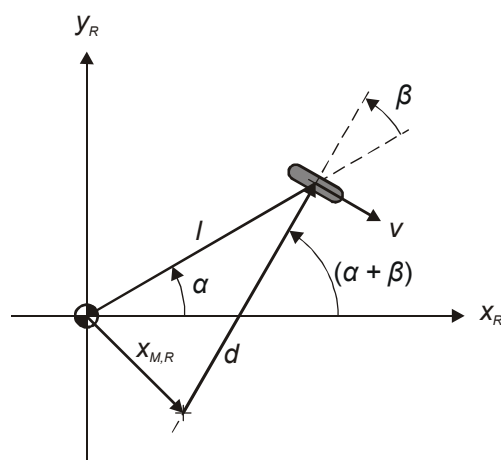


Abb. 29: Bestimmung des Lenkwinkels aus der Lage des Momentanpols

Zunächst ist es notwendig, die in Polarkoordinaten vorliegende Position des Rads in kartesische Koordinaten umzurechnen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_R = l \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \hat{=} P_1(x_1, y_1). \quad (2.99)$$

Die gewünschte Lage des Momentanpols ist bereits in kartesischen Koordinaten angegeben:

$$\bar{x}_{M,R} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix}_R \hat{=} P_2(x_2, y_2). \quad (2.100)$$

Die Punkte P_1 und P_2 bilden eine Gerade, nämlich die Achsgerade des betreffenden Rads. Damit ist dessen Lenkstellung bestimmt. In diesem Fall ist die Zweipunktform besonders günstig, um eine Geradengleichung aufzustellen:

$$\frac{\overbrace{y_R}^y - \overbrace{l \cdot \sin \alpha}^{y_1}}{\underbrace{x_R - l \cdot \cos \alpha}_x} = \frac{\overbrace{y_{M,R}}^{y_2} - \overbrace{l \cdot \sin \alpha}^{y_1}}{\underbrace{x_{M,R} - l \cdot \cos \alpha}_{x_2}} = k = \tan(\alpha + \beta). \quad (2.101)$$

(Vgl. [BAR-2001], S. 234)

Uns interessiert deren Steigung k bzw. der Steigungswinkel $(\alpha + \beta)$. Für diesen gilt

$$\alpha + \beta = \arctan2 \left[(y_{M,R} - l \cdot \sin \alpha), (x_{M,R} - l \cdot \cos \alpha) \right]. \quad (2.102)$$

Dabei ist mit $\arctan2(\Delta y, \Delta x)$ eine Variante der Arcustangensfunktion gemeint, die den berechneten Winkel anhand der Vorzeichen der Katheten Δx und Δy des Steigungsdreiecks automatisch in den richtigen Quadranten legt. Ihr Wertebereich ist $(-\pi, \pi)$ anstelle von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bei $\arctan(\frac{\Delta y}{\Delta x})$. Eine derartige Funktion ist in vielen Programmiersprachen, darunter auch MATLAB und C, bereits definiert.

Damit liegt eine Gleichung vor, anhand deren der notwendige Lenkwinkel dieses Rads berechnet werden kann:

$$\beta = \arctan2 \left[(y_{M,R} - l \cdot \sin \alpha), (x_{M,R} - l \cdot \cos \alpha) \right] - \alpha. \quad (2.103)$$

Diese gilt allerdings nur für den Fall, daß der Momentanpol im Endlichen zu liegen kommt, d.h. $\dot{\theta} \neq 0$.

Im Sonderfall $\dot{\theta} = 0$, d.h. wenn sich der Momentanpol im Unendlichen befinden und der Roboter geradeaus fahren soll, liegt nur ein Vektor vor, der in Richtung des Momentanpols zeigt:

$$\bar{x}_{M\infty,R} = \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}_R. \quad (2.104)$$

Diese Richtung entspricht genau der notwendigen Achsrichtung jedes Rads:

$$\arctan2(\bar{x}_{M\infty,R}) = \arctan2(\dot{x}_R, -\dot{y}_R) = \alpha + \beta. \quad (2.105)$$

Daraus läßt sich wiederum der Lenkwinkel β berechnen:

$$\beta = \arctan2(\dot{x}_R, -\dot{y}_R) - \alpha. \quad (2.106)$$

2.2.4.2 Bestimmung der Raddrehzahl aus der Lage des Momentanpols

Die Drehzahl N eines Rads kann ebenfalls aus dem Momentanpol $\bar{x}_{M,R} = [x_M \quad y_M]_R^T$ berechnet werden, wenn zusätzlich die Geschwindigkeitsinformation aus $\dot{\xi}_R$ und die Parameter des Rads vorliegen.

Entscheidend für die Geschwindigkeit am Kontaktpunkt eines Rads ist dessen Abstand zum Momentanpol, dem aktuellen Drehpunkt, um welchen der Kontaktpunkt rotiert, und natürlich die Winkelgeschwindigkeit, mit der diese Bewegung abläuft.

Gemäß Abb. 29 kann der Abstandsvektor zwischen dem Momentanpol und der Radposition wie folgt angegeben werden:

$$\bar{d} = l \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} l \cdot \cos \alpha - x_{M,R} \\ l \cdot \sin \alpha - y_{M,R} \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Maßgeblich ist allerdings nur dessen Betrag

$$\|\bar{d}\| = \sqrt{(l \cdot \cos \alpha - x_{M,R})^2 + (l \cdot \sin \alpha - y_{M,R})^2}. \quad (2.108)$$

Damit kann die skalare Geschwindigkeit am Kontaktpunkt angegeben werden:

$$v = \|\bar{d}\| \cdot \dot{\theta}. \quad (2.109)$$

Setzt man in diese Beziehung Gleichung (2.108) ein, so erhält man die Geschwindigkeit

$$v = \dot{\theta} \cdot \sqrt{(l \cdot \cos \alpha - x_{M,R})^2 + (l \cdot \sin \alpha - y_{M,R})^2}. \quad (2.110)$$

Diese Gleichung gilt selbstverständlich nur mit $\dot{\theta} \neq 0$.

Im Sonderfall $\dot{\theta} = 0$ hingegen, wenn der Momentanpol im Unendlichen liegt (s. Abb. 28), ist unabhängig von den Parametern des Rads die Geschwindigkeit im Kontaktpunkt identisch mit der translatorischen Bewegung des lokalen Bezugssystems:

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

In diesem speziellen Fall gilt damit für die skalare Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\dot{x}_R^2 + \dot{y}_R^2} = \sqrt{y_{M,R}^2 + x_{M,R}^2} = \|\bar{x}_{M\infty,R}\|. \quad (2.112)$$

Um aus der Geschwindigkeit am Kontaktpunkt die Drehzahl des Rads zu bestimmen, ist eine Unterscheidung nach der Art des Rads notwendig:

Handelt es sich beim betroffenen Rad um ein Schwenkrad oder ein Kugelrad, dann ist es gar nicht notwendig, die Drehzahl zu berechnen, da diese Räder nicht als angetriebene Räder, sondern nur als Stützräder verwendet werden. Somit ist keine Stellgröße notwendig.

Bei einem gelenkten Rad kann dessen Winkelgeschwindigkeit ganz einfach anhand folgender Beziehung ermittelt werden:

$$v = r \cdot \dot{\phi} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{v}{r}. \quad (2.113)$$

Da bei omnidirektionalen Rädern aufgrund des zusätzlichen Freiheitsgrads die Bewegungsrichtung des Kontaktpunkts im allgemeinen nicht mit der Richtung der Radebene übereinstimmt, ist die Berechnung hier etwas aufwendiger.

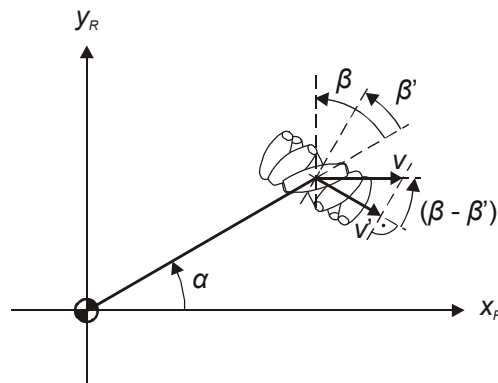


Abb. 30: zur Differenz zwischen Radausrichtung und Bewegungsrichtung am Kontaktpunkt

In Abb. 30 ist der Fall dargestellt, daß die Geschwindigkeit \bar{v} des Kontaktpunkts nicht mit der Komponente \bar{v}' dieser Geschwindigkeit übereinstimmt, die in der Radebene liegt. Für diese Komponente gilt nach Abb. 30

$$v' = v \cdot \cos(\beta - \beta'). \quad (2.114)$$

Ausschließlich diese Komponente der Geschwindigkeit muß durch die Rotation des Rads aufgebracht werden. Die Berechnungsvorschrift (2.114) – und genaugenommen auch die Zeichnung in Abb. 30 – gilt allerdings nur für den (im alten RoboCup-Fahrwerk) auftretenden Sonderfall $\gamma = 0$. Im allgemeinen Fall liegt die Geschwindigkeit \bar{v}' nicht in der Radebene, sondern gegenüber dieser um γ verdreht. Daher muß obige Beziehung gemäß Gleichung (2.52) – der Rollbedingung des omnidirektionalen Rads – erweitert werden zu

$$v' = v \cdot \cos(\beta - \beta' - \gamma) \cdot \frac{1}{\cos \gamma}. \quad (2.115)$$

Der unangenehme Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ muß hier nicht weiter betrachtet werden, da dieser schon bei der Beschreibung des omnidirektionalen Rads in Kap. 2.2.1.1.4 ausgeschlossen wurde.

Für die Winkelgeschwindigkeit eines omnidirektionalen Rads gilt daher

$$\dot{\varphi} = \frac{v'}{r} = v \cdot \frac{\cos(\beta - \beta' - \gamma)}{r \cdot \cos \gamma}. \quad (2.116)$$

Dabei ist $(\beta - \beta' - \gamma)$ der Fehlwinkel zwischen der aufgrund von Radstellung (β') und Rollenwinkel (γ) vom Rad ansteuerbaren Bewegung und der tatsächlichen Bewegung am Kontaktpunkt (β).

Für das feste Rad gilt eigentlich dasselbe wie für das gelenkte Rad. Allerdings muß noch Information über die Drehrichtung ergänzt werden. Am einfachsten geschieht dies, indem auch für das feste Rad die zuletzt beschriebene Methode (für das omnidirektionale Rad) angewendet wird (mit $\gamma = 0$). Möglicherweise erleichtert dies auch die Behandlung von Fällen, in welchen die kinematischen Beschränkungen, im speziellen die Gleitbedingung, nicht eingehalten werden.

In allen Fällen gilt für die Drehzahl eines Rads, wenn dessen Winkelgeschwindigkeit bekannt ist,

$$N = \frac{60}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}. \quad (2.117)$$

Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in rad/s einzusetzen, während sich die Drehzahl N in U/min ergibt.

Bei der Berechnung der Raddrehzahlen und Lenkwinkel wurde bisher angenommen, daß alle festen, gelenkten und omnidirektionalen Räder angetrieben sind. Es ist aber auch möglich, daß der Antrieb eines Rads ausfällt bzw. daß ein Rad gar keinen Antrieb besitzt. Für ein sol-

ches Rad muß die Raddrehzahl selbstverständlich nicht berechnet werden. Falls sich dadurch der Raum der möglichen Bewegungen einschränkt, wird dies dem übergeordneten System mitgeteilt. Die dann noch möglichen Bewegungen sind dies deshalb noch, weil einerseits die kinematischen Beschränkungen und andererseits die übrigen Antriebe die Aufgabe des ausgefallenen (bzw. nicht vorhandenen) Antriebs übernehmen.

2.2.5 Modellbildung

Wollte man ein Modell erstellen, das das Verhalten eines Roboters inkl. Fahrwerk annähernd exakt beschreibt, würde dies wohl eine eigene Diplomarbeit füllen. Deshalb werden hier bewußt nur jene Eigenschaften modelliert, die unbedingt notwendig sind, um die neu entwickelte Methode zu testen. Effekte, die durch Reibung oder Masseträgheit verursacht werden (Radschlupf, dynamische Achslastverlagerung etc.) werden außen vor gelassen, um den Blick auf das Wesentliche nicht zu verstellen. Außerdem wird das Simulink-Modell so ausgelegt, daß jeweils nur ein Fahrwerkszustand simuliert werden kann, das Fahrwerksmodell sich also während eines Simulationslaufs nicht verändert.

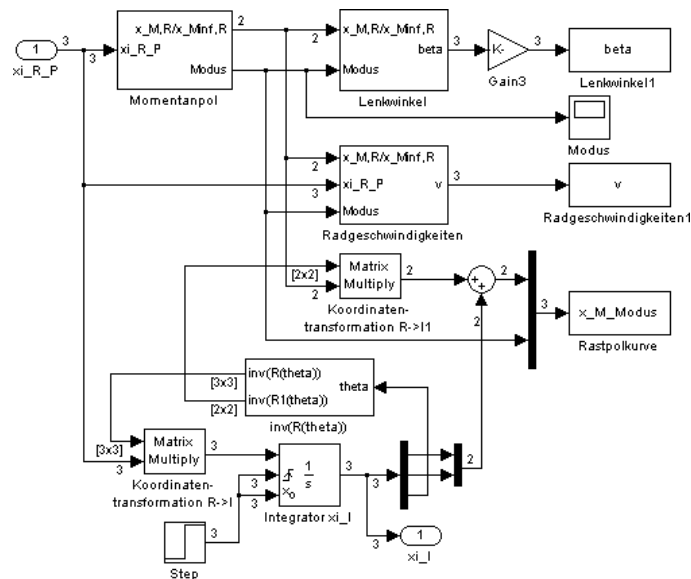


Abb. 31: Modell des Fahrwerks mit Berechnung der Raddrehzahlen und Lenkwinkel

Abb. 31 gibt einen Überblick über das verwendete Modell des Fahrwerks und die Implementierung der modellbasierten Regelung. Da die einzelnen Radantriebe und deren Regelungen nicht modelliert werden, ist nur ein Integrator (von der Geschwindigkeit zur Position) erforderlich.

Die drei Funktionsblöcke zur Berechnung von Momentanpol sowie Lenkwinkel und Raddgeschwindigkeiten werden im folgenden kurz vorgestellt.

ligen Räder. Diese Vorgangsweise vereinfacht nicht nur das Simulink-Modell, sondern erleichtert auch die Interpretation der Simulationsergebnisse.

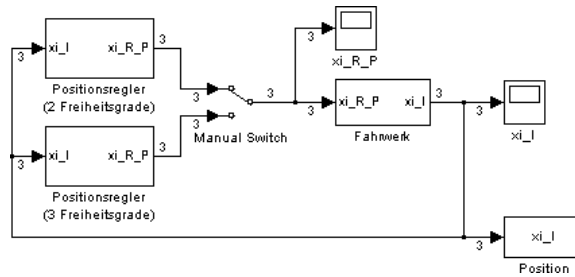


Abb. 35: Positionenregelkreis

Um das Simulink-Modell des Fahrwerks (s. Abb. 31) wird nun ein Positionenregelkreis gelegt. Dessen Besonderheit ist die Möglichkeit, zwischen zwei Positionenreglern umzuschalten (s. Abb. 35), die im folgenden näher beschrieben werden.

Dieser Positionenregelkreis ist wiederum nicht als Pfadplaner für den praktischen Einsatz zu sehen, sondern nur als ein möglichst einfacher Testdatengenerator.

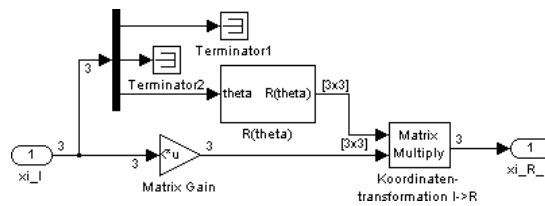


Abb. 36: Positionenregler mit drei Freiheitsgraden

Der untere der beiden, der alle drei Freiheitsgrade der Bewegung ausnützt, ist wie der in Kapitel 2.1.4 verwendete ein einfacher linearer Regler (s. Abb. 36).

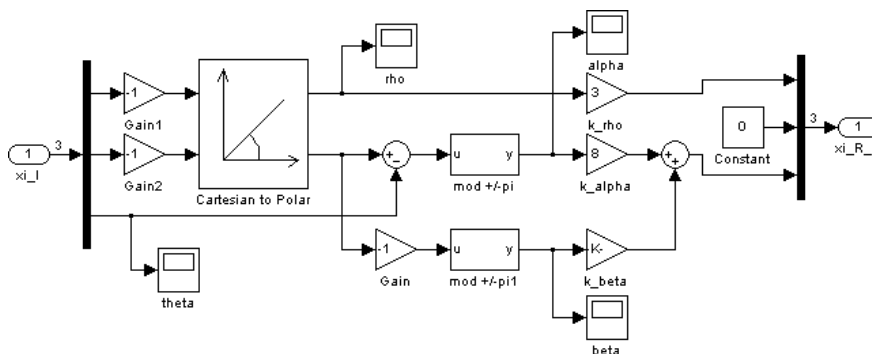


Abb. 37: Positionenregler mit zwei Freiheitsgraden

Der zweite Positionenregler, dargestellt in Abb. 37, verwendet als Stellgrößen nur die Translation in x_R -Richtung und die Rotation um die Hochachse (vgl. [SIE-NOU-2004], S. 82ff). Es wird also davon ausgegangen, daß eine Bewegung in y_R -Richtung aufgrund von kinematischen Beschränkungen nicht möglich ist. Daher muß für eine Translation das Fahrwerk jeweils richtig ausgerichtet werden.

2.2.6 Simulation

Für die Simulation wird die Position des Roboters zum Zeitpunkt $t = 0$ auf $\xi_I = [1 \quad 1 \quad \frac{\pi}{4}]^T$ gelegt. Von dort aus soll er zum Koordinatenursprung ($\xi_I = [0 \quad 0 \quad 0]^T$) bewegt werden. Die Fahrwerksstruktur des verwendeten Roboters ist in Abb. 38 zu sehen.

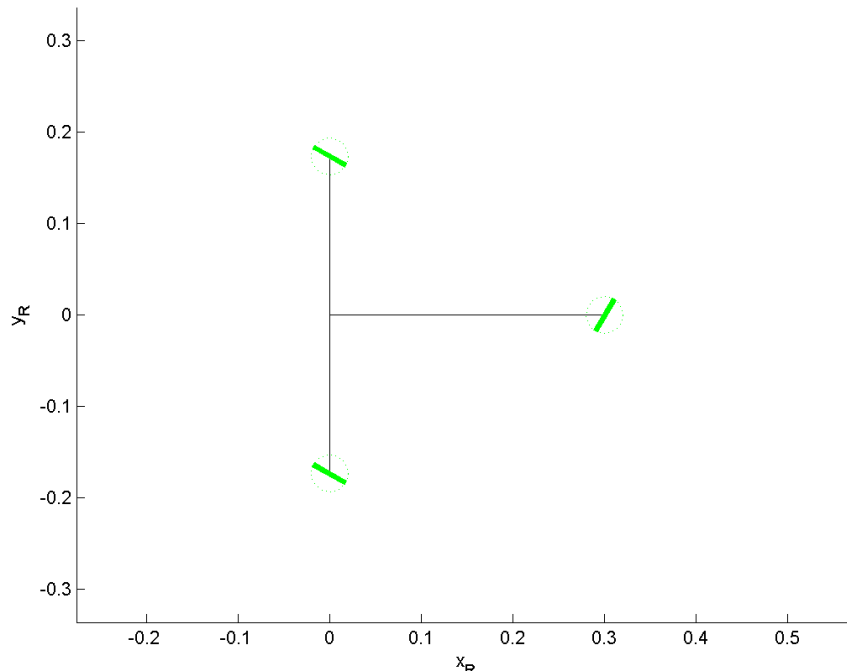


Abb. 38: Fahrwerksgeometrie (schematisch)

Zunächst wird der einfache lineare Regler für diese Aufgabe verwendet. In Abb. 39 ist das – zugegebenermaßen unspektakuläre – Ergebnis der Simulation zu sehen.

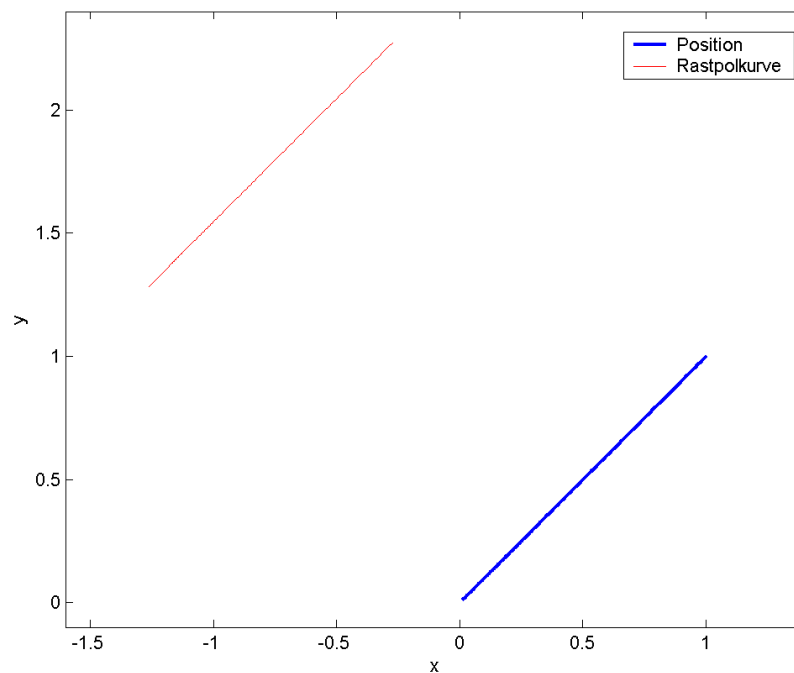


Abb. 39: Verlauf der Position und des Momentanpols (Regler mit drei Freiheitsgraden)

Aufgrund der Tatsache, daß sich der Roboter während der Fahrt in den Ursprung auch um seine Hochachse dreht, liegt der Momentanpol trotz einer ungekrümmten Bahnkurve nicht im Unendlichen. Da diese Drehung aufgrund der Reglereinstellung noch dazu mit genau derselben Dynamik abläuft wie die Translation, handelt es sich bei der Rastpolkurve um eine zur Bahnkurve parallele Gerade.

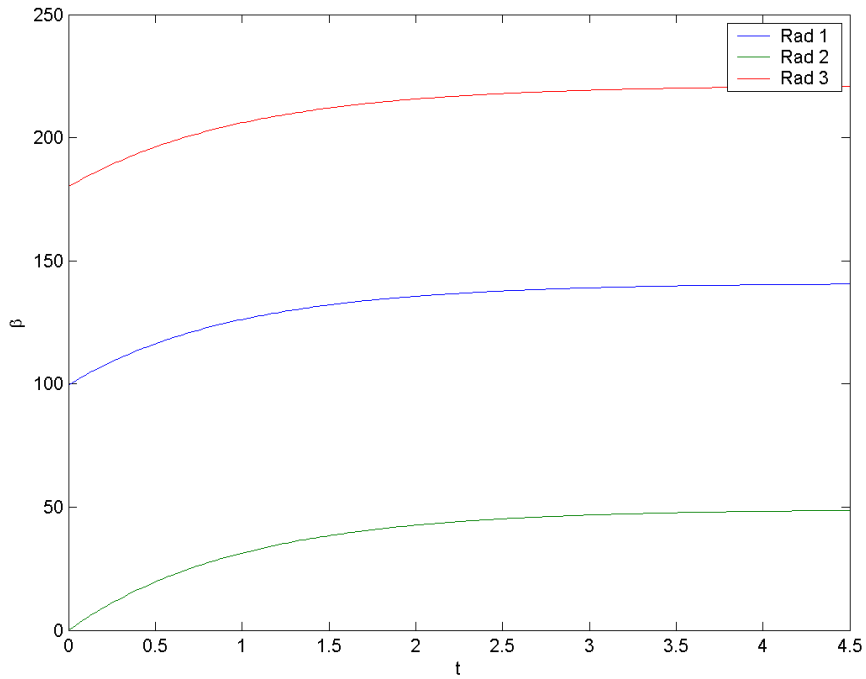


Abb. 40: Verlauf der Lenkwinkel (Regler mit drei Freiheitsgraden)

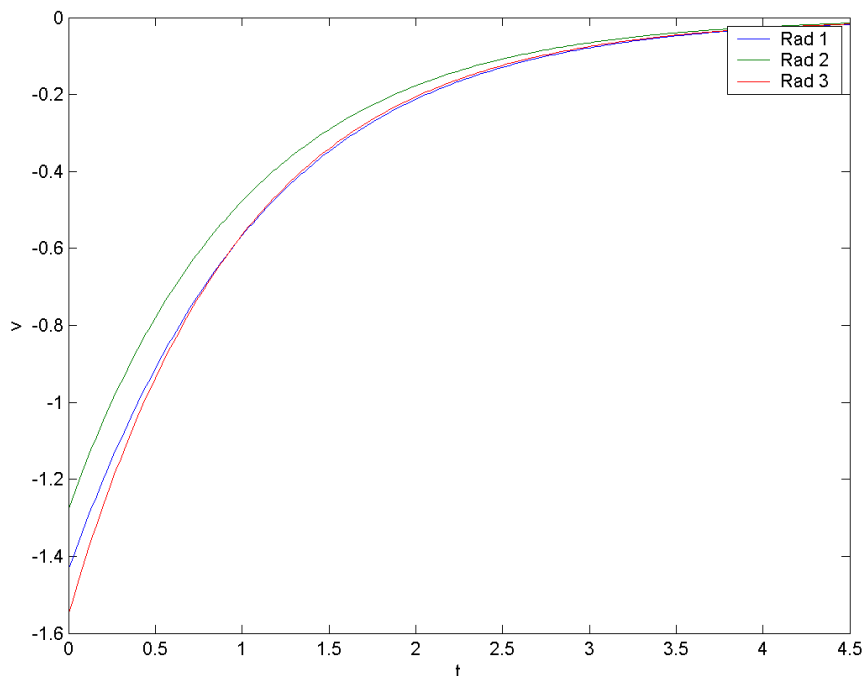


Abb. 41: Verlauf der Radgeschwindigkeiten (Regler mit drei Freiheitsgraden)

In Abb. 40 ist der dazugehörige Verlauf der Lenkwinkel der einzelnen Räder dargestellt, ebenso in Abb. 41 der Verlauf der Geschwindigkeiten an den Kontaktpunkten der Räder.

Nun wird statt des linearen Reglers der oben beschriebene Regler mit zwei Freiheitsgraden verwendet. Dadurch ist es dem Roboter in den allermeisten Fällen nicht mehr möglich, auf geradem Weg zum Ziel zu gelangen.

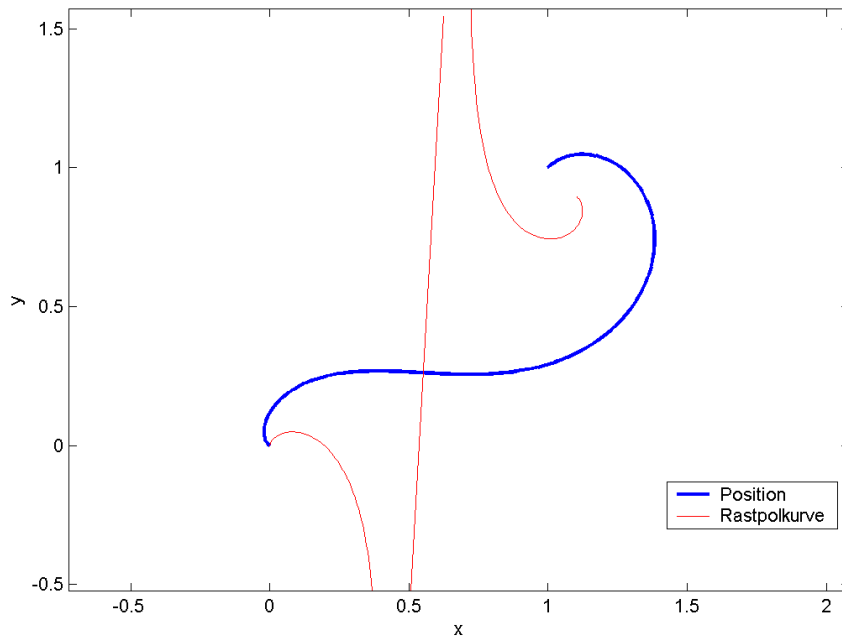


Abb. 42: Verlauf der Position und des Momentanpols (Regler mit zwei Freiheitsgraden)

Im aktuellen Fall durchfährt der Roboter eine S-förmige Kurve, wie in Abb. 42 zu sehen ist. Da der Roboter in der Ausgangsposition nach rechts oben ($\theta = \frac{\pi}{4}$) orientiert ist, beginnt die Rastpolkurve rechts unterhalb dieser Position (auf der y_R -Achse). Mit abnehmender Krümmung der Bahnkurve wandert der Momentanpol weiter nach außen, bis er im Wendepunkt ins Unendliche gelangt, um daraufhin von der anderen Seite (von unten) wieder ins Endliche zurückzukommen. Die Rastpolkurve endet, genauso wie die Bahnkurve, für $t \rightarrow \infty$ im Ursprung, wo das Fahrwerk die Ausrichtung $\theta = 0$ annimmt.

In Abb. 43 ist zu erkennen, daß mit diesem Regler zwei der drei Räder, abgesehen von Sprüngen um $\pm \pi$, einen konstanten Lenkwinkel haben. Sprünge im Lenkwinkel um $\pm \pi$ haben grundsätzlich keine große Bedeutung, da sie vom Antriebs- und Lenkwinkelregler ohnehin besser durch eine Drehrichtungsumkehr des Rads bewältigt werden. Hinzu kommt, daß im aktuellen Fall alle diese Sprünge mit Sprüngen bzw. Trendumkehrungen in der Geschwindigkeit am Kontaktpunkt einhergehen. Nach entsprechender Korrektur in den unterlagerten Regelungen würde sich daher sowohl für die Raddrehzahlen als auch für die Lenkwinkel ein stetiger Verlauf ergeben.

Dieser Regler würde folglich seine Funktion uneingeschränkt weiter erfüllen, wenn der Lenk-antrieb von Rad 2 und/oder 3 ausfallen würde.

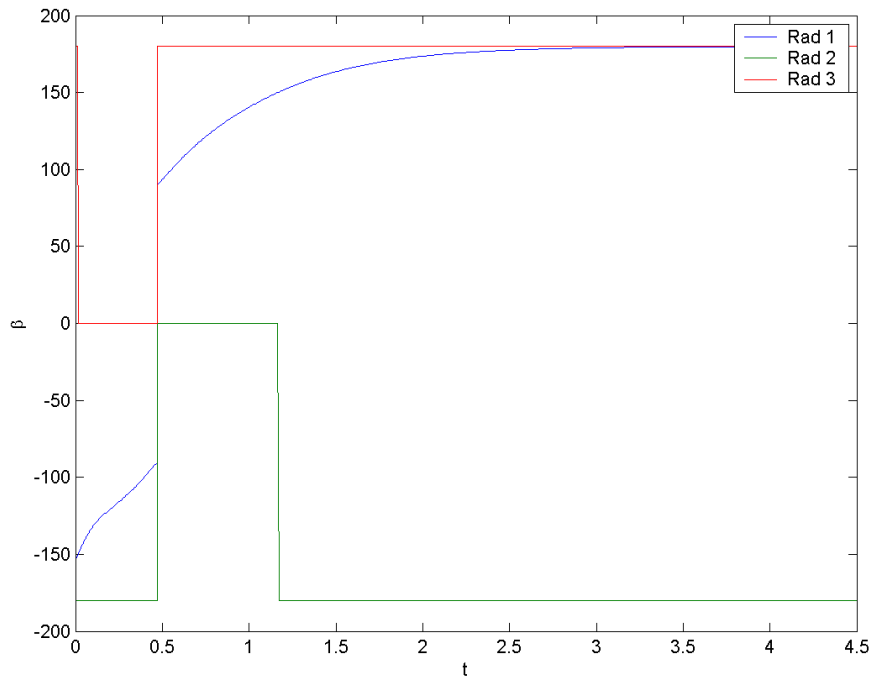


Abb. 43: Verlauf der Lenkwinkel (Regler mit zwei Freiheitsgraden)

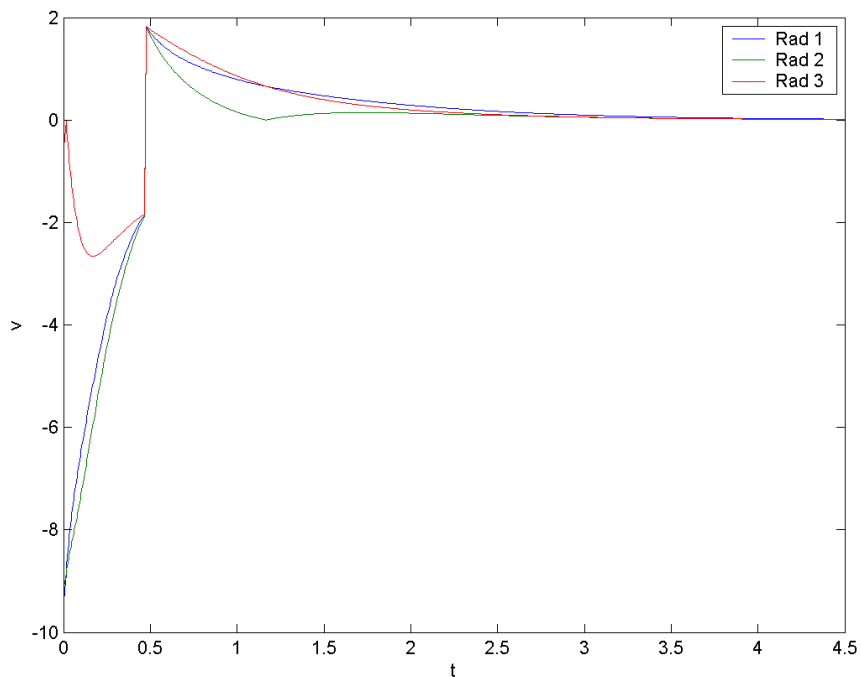


Abb. 44: Verlauf der Radgeschwindigkeiten (Regler mit zwei Freiheitsgraden)

3 Resümee

Nachdem der in Kapitel 2.1 präsentierte erste Lösungsansatz nur für eine kleine und in der Praxis relativ unbedeutende Klasse von Fahrwerken – nämlich jener ohne kinematische Beschränkungen – zum Erfolg geführt hat (s. Kapitel 2.1.6), ist es in Kapitel 2.2 gelungen, eine Methode zu entwickeln, mit der es möglich ist, eine modellbasierte Regelung nahezu beliebiger Fahrwerksstrukturen zu realisieren. Die zwei wesentlichen Merkmale, anhand deren sich der zweite Lösungsansatz vom ersten unterscheidet, sind einerseits die vollumfängliche Berücksichtigung der kinematischen Beschränkungen der Räder und andererseits die Tatsache, daß anstelle von Antriebsmomenten Raddrehzahlen als Führungsgrößen an die unterlagerten Antriebsregler weitergegeben werden. Dies entspricht auch mehr der üblichen Praxis als die ursprüngliche Annahme.

Mit der in Kapitel 2.2 vorgestellten Methode zur modellbasierten Fahrwerksregelung besteht nun also die Möglichkeit, anhand des aktuellen Fahrwerkszustands in einem ersten Schritt die möglichen Bewegungen des Fahrwerks zu ermitteln und dem übergeordneten System, beispielsweise einem Pfadplaner, mitzuteilen. Dies kann in jedem Zeitschritt, nur bei Veränderungen am Fahrwerkszustand (aber online) oder überhaupt nur auf Anweisung eines Bedieners (offline) geschehen. Mit der dadurch vorliegenden Information hat das übergeordnete System die Möglichkeit (und auch die Pflicht), die zur jeweiligen Zeit gewünschte Bewegung den möglicherweise gegebenen Einschränkungen zu unterwerfen.

Gibt das übergeordnete System eine Bewegung $\dot{\xi}_R$ in den drei Freiheitsgraden (Translation und Rotation in der Ebene) vor, so wird im zweiten Schritt aus dieser die notwendige Lage des Momentanpols ermittelt. Die Angabe des Momentanpols beschreibt die Bewegung in der Ebene (abgesehen von der Geschwindigkeit) ebenso vollständig, ist aber für die folgenden Berechnungen weit besser geeignet.

Im dritten Schritt erfolgt die eigentliche Ansteuerung des Fahrwerks, indem anhand der berechneten Lage des Momentanpols die notwendigen Werte der Raddrehzahlen und Lenkwinkel generiert und als Führungsgrößen an die einzelnen Antriebsregler weitergegeben werden.

Zahlreiche durchgerechnete Beispiele und Simulationen zeigen, daß das vorgestellte Prinzip tatsächlich relativ universell angewandt werden kann. Lediglich in bestimmten Extremsituationen führen die aufgrund der Struktur des verwendeten Modells unvermeidlichen Vereinfachungen zu Ergebnissen, die die Beweglichkeit des Fahrwerks stärker einschränken als notwendig. Solche Situationen können aber bei praktisch anwendbaren Fahrwerksgeometrien erst

bei Mehrfachfehlern auftreten, sodaß das hier präsentierte Konzept guten Gewissens als praxistauglich bezeichnet werden kann. Keinesfalls wird dem übergeordneten System eine höhere als die tatsächlich vorhandene Beweglichkeit des Fahrwerks vorgegaukelt.

4 Literaturverzeichnis

[BAR-2001] BARTSCH, HANS-JOCHEN: Taschenbuch mathematischer Formeln. 19. neu bearb. Aufl. Leipzig: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2001.

[BUN-1985] BUNSE, WOLFGANG; ANGELIKA BUNSE-GERSTNER: Numerische lineare Algebra. Stuttgart: Teubner, 1985.

[SIE-NOU-2004] SIEGWART, ROLAND; ILLAH R. NOURBAKHSI: Introduction to Autonomous Mobile Robots. Cambridge: The MIT Press, 2004.

[WEI-1977] WEIZENBAUM, JOSEPH: Die Macht der Computer und die Ohnmacht der Vernunft. 1. Aufl. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1977.

[ZAS-1948] ZASSENHAUS, HANS: „Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen.“ In: Commentarii Mathematici Helvetici, 21. Jg. (1948), S. 117-141.

5 Anhang

Im folgenden wird eine Auflistung der auf der beiliegenden CD-ROM gespeicherten Dateien mit kurzer Funktionsbeschreibung gegeben. Für detailliertere Informationen, speziell bezüglich der Übergabeparameter, wird auf die jeweiligen Hilfetexte verwiesen.

Unterverzeichnis *Kinetik*

Enthält Dateien, die dem ersten Lösungsansatz zuzurechnen sind (s. Kapitel 2.1).

`Fahrwerk_alt_8_Init.m`

Setzt die notwendigen Parameter für `Fahrwerk_alt_8.mdl`.

`Fahrwerk_alt_8.mdl`

Simulink-Modell eines Roboterfahrwerks ohne kinematische Beschränkung mit Positionsregelkreis.

`Radpositionen.m`

Funktion zur Auswertung eines Simulationslaufs von `Fahrwerk_alt_8.mdl` in Form einer graphischen Darstellung der Bahnkurve und des Roboters bzw. dessen Radachsen.

`Simulationslauf.m`

Führt die verschiedenen in Kapitel 2.1.5 beschriebenen Simulationsläufe durch.

Unterverzeichnis *Kinematik*

Die Dateien in diesem Verzeichnis dienen der Simulation der zweiten entwickelten Methode (s. Kapitel 2.2).

`Fahrwerk_mit_4_omnidirektionalen_Rädern.mat`

Fahrwerksdaten eines Fahrwerks mit vier omnidirektionalen Rädern, ähnlich dem alten Grazer RoboCup-Fahrwerk aus dem Jahr 2002.

`Fahrwerk_mit_3_gelenkten_Rädern.mat`

Fahrwerksdaten eines Fahrwerks mit drei gelenkten Rädern, ähnlich dem neuen Grazer RoboCup-Fahrwerk aus dem Jahr 2005.

`Oberflaeche.m`

Hauptprogramm, mit dessen Hilfe sämtliche in Kapitel 2.2 hergeleiteten Berechnungen Schritt für Schritt durchgeführt werden können.

`Rad_hinzufuegen.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und ermöglicht dem Benutzer, ein zusätzliches Rad in die Fahrwerksgeometrie aufzunehmen.

`kinematisches_Modell.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und berechnet aus den Fahrwerksinformationen die in Roll- und Gleitbedingung vorkommenden Matrizen (s. Kapitel 2.2.1).

`Achsgleichungen.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und ermittelt die Matrizen der Achsgleichungen der festen Räder.

`Fahrwerksgeometrie_darstellen.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und zeichnet in einem Graphikfenster eine schematische Darstellung der aktuellen Fahrwerksgeometrie.

`feste_Achsen_darstellen.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und stellt in einem eigenen Graphikfenster die Lage der Achsen der festen Räder dar.

`moegliche_Lage_Momentanpol.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und ermittelt die Einschränkungen für die Lage des Momentanpols aufgrund der kinematischen Beschränkungen der festen Räder, wie in Kapitel 2.2.2.1 beschrieben.

`moegliche_Bewegungen.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen und berechnet die möglichen Bewegungen des Fahrwerks, wie in Kapitel 2.2.2.2 beschrieben. Dazu werden vom Bediener Informationen über den Fahrwerkszustand abgefragt.

`Momentanpol_berechnen.m`

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen, bestimmt für eine vorzugebende Bewegung die notwendige Lage des Momentanpols (s. Kapitel 2.2.3) und zeichnet diese in dasselbe Graphikfenster wie `feste_Achsen_darstellen.m`.

Radstellungen_Radgeschwindigkeiten.m

Wird aus `Oberflaeche.m` aufgerufen, ermittelt für einen mit `Momentanpol_berechnen.m` bestimmten konkreten Momentanpol die Lenkwinkel und Drehzahlen der einzelnen Räder (s. Kapitel 2.2.4) und stellt diese ähnlich wie `Fahrwerksgeometrie_darstellen.m` graphisch dar.

Rad_zeichnen.m

Wird aus `Fahrwerksgeometrie_darstellen.m` und `Radstellungen_Radgeschwindigkeiten.m` aufgerufen und zeichnet ein einzelnes Rad, gegebenenfalls mit Zusatzinformationen (z.B. Bewegungsrichtung) in das jeweilige Graphikfenster.

Pfeil_zeichnen.m

Wird von `Momentanpol_berechnen.m` und `Rad_zeichnen.m` aufgerufen und zeichnet einen Pfeil bestimmter Länge und Ausrichtung.

Zassenhaus.m

Implementierung des Algorithmus von ZASSENHAUS zur Berechnung der Summen- und Schnittbasis zweier Basen. Wird von `moegliche_Bewegungen.m` aufgerufen.

Radbewegung.m

Ermittelt, abhängig vom aktuellen Bewegungsmodus, Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung am Kontaktpunkt eines Rads. Wird von `Radstellungen_Radgeschwindigkeiten.m` aufgerufen.

Fahrwerk_neu_4_Sim.m

MATLAB-Skript zur Durchführung der in Kapitel 2.2.6 abgedruckten Simulationsläufe mit dem Simulink-Modell `Fahrwerk_neu_4.mdl`.

Fahrwerk_neu_4.mdl

Dieses Simulink-Modell beinhaltet alle in den Kapiteln 2.2.3 und 2.2.4 beschriebenen Berechnungen, zwei verschiedene Regler für die Position des Roboters und die Berechnung der Rastpolkurve (Verlauf der Lage Momentanpols im Inertialsystem).

Betrag.m

Wird von `Fahrwerk_neu_4.mdl` zur Berechnung der euklidischen Norm von in einem Array gespeicherten Vektoren benötigt.